1550

Digitized by the Internet Archive
in 2018 with funding from
Getty Research Institute

https://archive.org/details/delleprojezionig01tram

DELLE
PROJEZIONI GRAFICHE

E DELLE LORO PRINCIPALI APPLICAZIONI

TRATTATO TEORICO-PRATICO

AD USO

DELLA REALE SCUOLA MILITARE DEL GENIO,
E DELL' ARTIGLIERIA

COME ANCORA

DI TUTTI I GIOVANI ARCHITETTI, ED INGEGNERI CIVILI

DI GIUSEPPE TRAMONTINI

PROFESSORE DI GEOMETRIA DESCRITTIVA
NELLA R. SCUOLA SUDDETTA

PARTE I.

MODENA MDCCCXI.

PRESSO LA SOCIETÀ TIPOGRAFICA.

PREFAZIONE.

Tenterò di eseguire in questi libri un pensiere che fu del celebre Sig. Monge, e ch' io presi per norma nell' ordinare la maggior parte delle lezioni da me dettate nella Reale Scuola Militare del Genio, e dell' Artiglieria.

In seguito all' opera che il menzionato Autore publicò sotto al titolo di Géométrie descriptive, *divisava egli di mostrarne le applicazioni alla Prospettiva lineare, ed all' arte di determinare le ombre nei disegni.* (*)

Occupazioni più importanti allo Stato distolsero allora l' illustre Geometra dal mandare ad effetto il suo proposito; e convien credere che non gli sia più tornata l' opportunità di appagare l' altrui espettazione, compiendo un' opera ch' era stata dalla maestra sua mano incominciata con tanto e sì giusto applauso.

Io sarei fortunato se, anche imperfettamente, ristorar potessi il Pubblico d' una tal privazione, mentre col dare alle stampe il transunto delle accennate lezioni, cerco di provvedere, in quanto da me dipende, al comodo ed al profitto di chi deve ascol-

---

(*) Géométrie descriptive . . . Avertissement.

tarle. Le quali, dopo l' esperimento fatto per alcuni anni nella R. Scuola Militare, non sarà disdetto presumere ch' esser possano di qualche vantaggio a tutti que' giovani, che per dovere, o per diletto, spendono i loro studj intorno all' uso della Geometria nelle pratiche delle arti, e specialmente di quelle che formar debbono la suppellettile dell' architetto. (*)

Per tanto ho divisa quest' opera in due parti, alla prima assegnando le teorie spettanti ai metodi delle projezioni, ed oltre a ciò le applicazioni di essi metodi a molti articoli di Geometria pura.

Ho raccolto nella seconda parte le dottrine che risguardano i due principali usi delle projezioni nelle arti; cioè il metodo di rappresentare con geometrica esattezza gli accidenti visibili d' un oggetto determinato di forma, e di posizione nello spazio, e per converso il metodo di ridurre un solido informe ad una figura che sia determinata esattamente per mezzo delle rispettive projezioni.

Mirando principalmente a questi fini della pratica, regolai la scelta e l' ordine delle cose che si contengono nella suddetta prima parte; ma nel tempo medesimo parvemi di poter cogli stessi mezzi tendere al conseguimento d'un altro scopo, che ora sono per indicar brevemente.

Pel corso di parecchi anni impiegati nell' istruzione di giovani geometri, ho potuto confirmarmi in un' opinione, la quale assai dappresso conviene col pa-

---

(*) Vitruv. L. I. Cap. I.

rere del Sig. Monge (*); ed è, che di grandissimo ajuto sarebbe a tutti coloro i quali debbonsi innoltrare col calcolo nella sublime Geometria, se preparati fossero a questo passo da un' opportuna introduzione col mezzo dei metodi grafici.

Imperciocchè mentre con essi possiamo stabilire in piena evidenza i principali teoremi di Geometria, i quali, espressi che siano in termini di lingua algebrica, somministrano incominciamento certo e chiarissimo ad ogni risoluzione che si cerchi cogli artifizj di quella lingua meravigliosa, possiamo conseguire nel tempo stesso un altro grande vantaggio; cioè addestrare l' immaginazione, ed educando le sue forze con ordinato esercizio, prepararla a qualunque siasi più complicato ed arduo concepimento.

Non è cosa facile ad intendere perchè nei moderni sistemi di scientifica, e di letteraria instituzione, presso che tutti i pensieri siano rivolti a coltivar la memoria; mentre la minor cura è data all' immaginazione: quasi che fosse indomabile facoltà della mente, atta solo agli inspirati impeti della poesia, nè capace di veruna disciplina, o di legge.

Ciò nulla ostante, non solo le Meccaniche, l' Astronomia, la Geodesia, l' Architettura, ma per fino la stessa Geometria speculativa ed astratta, fanno continuamente fede dell' assiduo e paziente servigio che loro presta l' immaginazione.

Anzi presso di molti nobilissimi Filosofi è dimo-

(*) Géométrie descript. . . n.° 10.

strato che da questa facoltà principalmente derivano le forze della stessa memoria (*); ch' essa l' immaginazione interviene in tutte le operazioni dell' umano intendimento; che ad essa appartiene formar le idee, quasi materia e soggetto immediato del pensiero; ch' essa le conserva per lungo tratto presenti, e le ricompone, e le raccoglie al bisogno, poichè furono o scancellate dal tempo, o disperse dalle distrazioni.

Laonde non è meraviglia che i Greci, in ogni scienza, ed in ogni bell' arte sovrani maestri, così gran cura abbian posta acciocchè nell' instituzione dei giovani ingegni fossero comprese quelle parti di ammaestramento, le quali sono acconcie ad educare specialmente l' immaginativa. (**)

Nè io potrò indurmi a credere che il non coltivare con ogni possibile diligenza questa facoltà sì preziosa e principale sia per essere di niuno, o di leggier pregiudizio alla pubblica Istruzione, e sopra tutto in quella parte che risguarda i Giovani incamminati per la carriera delle scienze che diconsi esatte.

Nell' ordinare adunque la prima parte di quest' opera, intesi in primo luogo ad informare i Giovani Ingegneri ed Architetti delle cose di superior Geometria che giudicai più necessarie a sapersi, deducendone le dimostrazioni dai soli principj dell' ordinaria Geometria elementare, senza punto dipendere dal calcolo.

(*) Prevost. Essai sur l'imagination, etc.

(**) John Gillies, The History of Ancient Greece. V. II, Cap. XIII. Voyage du Jeune Anacharsis en Gréce V. II. Chap. 26.

In secondo luogo mirai all' altro fine, cioè di educare l' immaginazione dei Giovani Geometri, onde abile più facilmente divenga a condurre il raziocinio con franco passo dietro le traccie misteriose del calcolo, sopra tutto ov' è necessario considerar combinate nella quantità figurata tutte a tre le sue dimensioni in un tempo.

Con questo intendimento ho seguito la medesima distribuzione, secondo la quale parmi che trattar si debbano le stesse cose algebricamente; e ciò si potrà conoscere di leggieri, confrontando i primi capitoli di questo trattato col saggio che pubblicai nel corso elementare pegli Aspiranti, che ha per titolo Nozioni preliminari sul metodo delle tre coordinate.

Adunque nei tre primi capitoli mostro ciò che sono le projezioni d' un punto, d' una linea, d' una superficie; come valgan esse ad esprimere adequatamente qualsivoglia di questi oggetti geometrici costituito nello spazio in qualunque modo; come operando intorno alle projezioni, si venga ad effettuare ciò che non potrebb' essere immediatamente operato sopra l' oggetto corrispondente, il quale non esiste in realtà, ma solo da esse projezioni è rappresentato.

Dal tramutare i piani coordinati, cioè dal riferire a tre piani posti ad arbitrio, secondo il bisogno, la posizione d' un oggetto, che è data relativamente a tre altri piani, grandissima è l' utilità che ne proviene, tanto nelle ricerche puramente speculative, come si vede in questa prima parte, quanto ancora nelle pratiche, come scorgesi nella seconda; e specialmente ove trattasi della Prospettiva.

Ma quantunque negli usi pratici questa permutazione di piani soglia essere d' ordinario agevolata e ristretta da certe particolari circostanze; nondimeno stimai di doverne presentar nel Cap. IV un' idea così astratta e generica, quale è d' uopo concepirla in Analisi.

Dopo aver considerato nello spazio un oggetto unico ed isolato, passando al caso che più oggetti siano riferiti al medesimo sistema di piani coordinati, veggonsi dalla rispettiva posizione di questi oggetti nascere nelle projezioni loro certe reciproche relazioni, le quali son utili, anzi necessarie a considerarsi; mentre ne emergono assai belle proprietà geometriche importantissime alla pratica.

Esse relazioni consistono principalmente o nel segarsi, o nell' essere a contatto linee con linee, linee con superficie, superficie con altre superficie.

Sopra l' intersecazione, ed il contatto di linee con linee, stimai di dover parlare nel Cap. II, giacchè ivi era d' uopo ragionar intorno alle intersecazioni scambievoli delle linee rette, ed agli angoli da esse formati: senza di ciò non potendosi progredire alle susseguenti dottrine.

Sopra gli altri due articoli delle intersecazioni, e dei contatti di linee con superficie, o di superficie fra loro, parlo nel Cap. V, avendo posto cura sì in questo, come nel precedente Cap. II di trattare cotali argomenti in modo, che allora quando si vorrà trasferire all' Analisi i principj così stabiliti, essi possano convenire naturalmente con quelli adottati da La Grange nell' opera immortale sopra le Funzioni Analitiche.

Il Capitolo VI è occupato da una serie di problemi, proposti per esercizio, ed insieme altri destinati a schiarimento delle cose anzi dette, altri premessi come fondamenti alle dottrine pratiche, le quali debbon essere spiegate nella seconda parte.

Incomincio dal tema del Lib. XIII degli elementi d' Euclide, che è la costruzione de' cinque solidi regolari, e la ricerca della ragione che hanno i loro lati col diametro della sfera circoscritta ed inscritta.

Ai Giovani studiosi che ne faranno esperimento, spetta giudicare se gli artifizj delle projezioni introdotti in cotesta parte di Geometria, rechino ad essa quella chiarezza, e quella facilità che a me sembra vedervi.

Siccome anche alla piramide tetraedra non regolare si può sempre circoscrivere, ed inscrivere una sfera, stimai pertinente al medesimo Cap. VI la risoluzione di questi due problemi. E parendomi che un tale argomento conduca naturalmente all' esame della dipendenza che hanno fra loro gli elementi d' un angolo sferico, che è quella appunto, la quale è fra gli elementi d' un angolo solido triedro, mi feci a mostrare una maniera di risolvere i cardinali problemi di Trigonometria sferica, per mezzo di costruzioni lineari assai semplici, delle quali stimo ch' esser possa molte volte utile e comodo l' uso, e nelle pratiche di Geodesia, ed in quelle della Geografia, della Gnomonica, della Stereotomia.

La parte che rimane del medesimo Cap. VI versa intorno ad esempj d' intersecazioni, e di contatti scambievoli fra certe superficie, ed è specialmen-

te ordinata a stabilire parecchi teoremi, de' quali ha bisogno la Prospettiva; nè sò che altri trattati anteriori ne abbiano data contezza.

Parlo nel Cap. VII dei circoli osculatori, delle evolute, e delle evolventi; e prescielgo in tali materie quei temi, che primieramente essendo di più facil uso, recano perciò maggiore e più frequente utilità nelle pratiche; in secondo luogo, perchè contengono le nozioni fondamentali, sono principj e scala per salire alle altre parti superiori della Scienza geometrica.

Cotesti principj ho cercato di porre in chiaro senza indurre nelle mie dimostrazioni nè idee di quantità infinitesime, nè assiomi che siano esclusi dalla Teoria soprammentovata delle funzioni.

Così fatta condizione m' imposi per non declinare dallo scopo propostomi, come accennai di sopra, ed oltre a ciò perchè giudico che in altro modo non si poteva connettere, senza qualche deformità, il presente trattato cogli elementi sintetici adottati per questa R. Scuola, all' utilità della quale sono principalmente consecrate le mie fatiche.

E poichè specialmente intorno alle cose dette dal Sig. Monge sull' argomento di questo capitolo, io mi trovai obbligato a manifestare alcune rispettose obbiezioni, parmi opportuno, più in questo che in qualunque altro luogo, dichiarare la mia grandissima obbligazione verso le opere di quest' Illustre Autore; presso del quale io spero che la sincerità di questo tributo abbia ad essere comprovata da quella, con cui mi sono permesso di porre ad esame alcune sue dimostrazioni.

Come due specie di applicazioni occupar devono la seconda Parte, che è dedicata alle pratiche, così dalla natura stessa del suo argomento essa è divisa in due libri.

Tratta il primo del metodo di rappresentare per mezzo d' immagini superficiali un oggetto qualunque determinato di figura, e di posizione nello spazio; e questo è uffizio della Prospettiva: sia che risguardare si voglia come arte, ponendo mente sol tanto alle sue operazioni: sia che risguardisi come scienza, considerando le teorie per le quali esse operazioni vengono dimostrate.

Pochissime altre parti della Fisico-matematica Scienza possono vantare nè più rimota, nè più nobile antichità che la Prospettiva. La Grecia ne possedeva trattati di Democrito, e di Anassagora, ed in Italia quasi innumerabili sono i libri di Prospettiva pubblicati dal risorgimento delle lettere fino a' tempi nostri.

Fra tante opere di questa specie a me note, niuna parmi nè più elegante che quella di Giuseppe Torelli, del cui nome illustre non meno in Geometria che in Letteratura si fregia la mia Patria Verona; nè più diligente ed accomodata all' uso universale che quella di Eustachio Zanotti Bolognese; nè più sottile ed ingegnosa che quella dell' Inglese Taylor. Ciò nulla ostante in un campo mietuto da tante mani, e sì valorose, parmi di aver trovata alcuna spica non indegna d' esser raccolta, e con qualche speranza di frutto seminata nelle scuole; se pur sarà mai che nelle scuole nostre si accetti la massima di quel Panfilo

insigne Pittore, il quale al pari di Platone escludeva dalle sue Lezioni chiunque fosse digiuno di Geometria .

Stabilisco brevemente nel Capitolo I le nozioni generali e dell' ipotesi che serve di fondamento ad ogni metodo di prospettiva, e delle varie modificazioni che riceve quest' ipotesi, ora per accomodarsi ai bisogni delle arti, ora per condurre le produzioni prospettiche più da vicino alla perfetta imitazione delle cose naturali .

Cerco di determinare con chiarezza l' idea che aver dobbiamo del grado, cui può giugnere la detta imitazione, e di mostrare le condizioni, secondo le quali è lecito tramutare qualunque problema di Prospettiva lineare in un problema corrispondente di pura Geometria .

Ragionando di queste cose ho posta speciale attenzione in definire la natura e l' ufficio di quella linea, ch' io nomino col Sig. La Croix (*) contorno apparente, *della quale non sò che in altri trattati sia stato dimostro adequatamente l' uso e l' utilità .*

I due Capitoli II, e III contengono i metodi pratici della Prospettiva lineare; cioè il Capitolo II dichiara quelli appartenenti alla specie di prospettiva, ch' io nomino paralella, *ed il Capitolo III espone quelli che spettano alla Prospettiva chiamata* concorrente .

Dopo aver insegnate le risoluzioni rigorose dei

(*) Complément des élémens de Géométrie . . . n.° 116.

problemi proposti, ho stimato essere cosa non poco utile mostrare ancora alcuni espedienti per ottenere quel grado di approssimazione che può bastare in pratica; i quali espedienti si troveranno in vero alquanto diversi da molte regole, ciecamente ricevute dai pratici, ma, per quanto io credo, di quelle assai più comodi, e conformi alla verità.

Non sarà discaro che nella scelta degli esempj io preferito abbia quelli che più frequentemente occorrono nel dover eseguire i disegni di architettura; e quanto al loro numero, ho voluto schivare il dispendio d' un' abbondanza di figure soverchia al bisogno, e posi piuttosto la mia attenzione in far sì che apparisca l' uniformità del metodo nelle varie risoluzioni, per quanto il comporta la diversa natura dei quesiti.

I Capitoli IV, e V toccano la parte più filosofica della Prospettiva, mentre nel IV mi faccio ad esaminare più intimamente la relazione che ha l' oggetto con l' immagine che gli corrisponde, a fine di conoscere quando cotesta relazione sia così necessaria, che per essa arguir possiamo dall' immagine le vere dimensioni, e la posizione dell' oggetto.

Dalle quali considerazioni nasce l' opportunità di accennare come giovi talvolta la Prospettiva anche nelle operazioni di Geodesia, e come somministri ai Geografi il metodo, fino ad ora stimato più acconcio, per descrivere le mappe.

Ma il Capitolo V versa quasi interamente circa un quesito, nella cui risoluzione non sembrano d' accordo ancora i Filosofi, e gli Artisti: ciò è, quali siano le condizioni più vantaggiose del cono ottico, e

del quadro per l' effetto della prospettiva. Sopra di che esposi ciò che mi parve conforme alla verità, non pretendendo ad altro merito che a quello di averla sinceramente cercata.

Ma l' uffizio della Prospettiva lineare è solamente limitato alla determinazione di quello spazio che nella superficie del quadro viene occupato dall'immagine dell' oggetto.

L' immitazione degli altri accidenti cagionati dalla luce sopra la superficie delle cose visibili, trattone la varietà dei colori, benchè in gran parte si riferisca ad un principio che è comune alla Prospettiva lineare, ciò nulla ostante richiede una speciale dottrina, la quale chiamasi dai Pittori Prospettiva aerea.

Quantunque un trattato di Prospettiva riputar non si debba compiuto, se l' una e l' altra non comprenda delle due parti suddette, cioè tanto la Prospettiva lineare, quanto l'aerea; ciò nulla ostante il più degli Autori si assolve con accennare appena i primi principj, dai quali ripeter si debbono gli accidenti delle ombre, e dei lumi, abbandonando agli ammaestramenti dell' uso il rimanente dell' istruzione di che abbisogna il disegnatore.

Quelli poi che con alquanto maggior diligenza ne trattano, o limitansi alla considerazione di alcuni casi particolari, o parlano della cosa in modo sì oscuro, o imperfetto, che questo argomento può dirsi poco meno che intatto.

Nè gli speciosi titoli, o il tipografico lenocinio d' alcune opere, anche moderne e recenti, che tratta-

no appositamente di queste cose, inganneranno la fiducia de' giovani mediocremente instrutti nella geomemetria e nel metodo delle projezioni. Ho già mostrato altrove (*) qual grado di fede prestar si debba agli insegnamenti in esse contenuti; e quì basta convenire sul giusto merito loro, che è di aver insinuato in molte scuole l' amore dell' esattezza, ed il desiderio d' istruire la Gioventù per principj.

Considero adunque nel Capitolo VI gli accidenti delle ombre, distinguendole in due specie: altre dette solamente ombre, *e per maggior distinzione io le nomino* ombre proprie, *le quali nascono sopra la superficie de' corpi, non da altra causa che dalla figura di essi, e dalle condizioni del lume che gli investe; altre diconsi* sbattimenti *ovvero,* ombre projette, ombre portate, *perchè derivano, e sono come lanciate da un oggetto sopra la superficie d' un altro, sul quale il primo impedisce che arrivino i raggi della luce ad esso indiritti.*

Se nelle condizioni del lume non ho mai prescritto veruna particolare misura all' inclinazione de' raggi coi piani coordinati, non è solamente a fine di rendere generali le risoluzioni dei problemi proposti; ma ebbi in animo ancora di contraddire a quella massima, che ponendo le projezioni d' un raggio ambedue inclinate secondo un angolo semiretto alla comune intersecazione dei due piani coordinati, l' effetto del chiaro scuro debba riescire più vago.

(*) Problema Grafico . . . T. XIII degli atti della Soc. Ital.

Queste condizioni non altro effetto producono che agevolare alcune pratiche assai limitate, tanto che possano eseguirsi anche da tali disegnatori, i quali non intendano la ragione del loro operare; e se alcuna utilità v' è in quest' effetto, ella di gran lunga è superata dal pregiudizio che ne viene lusingando la pigrizia, e l' ignoranza.

Qual parte abbiano le penombre negli accidenti del chiaroscuro; con quali leggi debbano variare; in quali termini sia possibile, ed utile valersi della Geometria per imitar quelle leggi; ciò forma il soggetto del Capitolo VII. Parla il Capitolo VIII dei sussidj che possiamo legittimamente dimandare alla Geometria per regolare le gradazioni dei lumi nei disegni. Sopra di che procurai di porre in chiaro quelle sole poche teorie, le quali aprono l' ingresso a qualunque più curiosa ricerca in cotesta materia. Ma il mio fine principale fu di presentarle in quell' aspetto, dal quale penso che raccoglier si possa più fedele, e più pronto lume per dirigere l' artista nell' osservazione dei fenomeni naturali: primo ed ultimo mezzo, sempre sicuro, col quale egli deve perfezionare la propria istruzione.

Parrà strano che nel Lib. II composto di poche pagine, io trascorra le dottrine stereotomiche spettanti all' arte di formare i cunei per la fabbricazione delle Volte.

Imperciocchè ognun sa che questa materia trattata classicamente dal celebre Frèzier, per tacere di molti altri autori francesi, occupa quasi interi tre ben grossi volumi. Ma si osserverà in primo luogo

che avendo io ordinate anche a quest' argomento di applicazione le teorie della prima parte, ho disgombra così da molte difficoltà la via che mi restava a percorrere, ed ho tolto il bisogno di lunghe digressioni dalle dottrine pratiche alle teorie corrispondenti. In secondo luogo non è mio proposito di entrare nelle più minute, e meccaniche parti, come se avessi ad instituire non solo l' architetto che dee diriger l' opera, ma ancora l' artefice che deve eseguirla.

Intendo soltanto di far vedere come servano i metodi delle projezioni quando ad un solido si vuol dare una determinata figura; e presi come esempio d' ogni altro più utile ed opportuno un soggetto così importante per l' architettura, sopra del quale non so che altro italiano autore siasi occupato, se vogliasi eccettuare Giovanni Borra, il quale assai scarsamente ne parla, (*) scostandosi non poco da quella esattezza matematica che l' importanza dell' argomento sembra richiedere.

Credo pertanto di aver soddisfatto all' assunto mio proponendo alcune regole generali nel Capitolo I, e negli altri nove successivi mostrandone l'applicazione, sempre uniforme, agli esempj di tutte quelle specie di Volte che sono più frequentemente usate con approvazione nell' italiana architettura.

Può la mia intenzione andar fallita, ma certamente posi ogni cura perchè la detta uniformità regni manifesta in tutte le risoluzioni de' varj quesiti,

(*) Trattato della cognizione pratica delle resistenze ec.

pensando che in tal modo, senza stancar l' attenzione con infinite minuzie, chiunque avrà intesa la sostanza dei metodi ch' io propongo, sarà abile a risolvere le difficoltà di qualunque altro problema da me non tocco sia per occorrere in pratica.

Sebbene sia difficil cosa soddisfare insieme e all' impazienza dei pratici, ed alla sottigliezza degli altri che preferiscono la speculazione astratta, io non lascierò di desiderare benigni i suffragi di questi, e di quelli; e vorrei pure che i primi s' invogliassero di conoscere i principj geometrici dell' arte loro; i secondi s' inducessero talvolta a discendere dalle astratte contemplazioni agli utili studj degli usi che queste possono avere. Col desiderio di promovere in tal maniera l' industria nazionale, intendo di rendere quel più solenne omaggio e sincero che per me si possa, alla clemenza di S. M. I. e R., e dell' Augusto Principe che la rappresenta, cui piacque impiegare l' opera mia in un Istituto favorito ed onorato dalla regia munifica predilezione.

INDICE

delle cose contenute nella Parte I.

PREFAZIONE. Pag.	III	XVIII			
Maniera di concepire la generazione d' una superficie, e d' una linea nello spazio.	1.	2.			
CAP. I. Del punto.					
Come si riferisca la posizione d' un punto a tre piani fra loro coordinati.	2.	4.	§	1.	
Come si rappresentino questi tre piani in un solo, indicando in esso la posizione del punto obbiettivo per mezzo delle sue projezioni.	4.	10.	§	2.	6.
CAP. II. Della linea.					
Come ogni linea data nello spazio si possa riferire a tre piani coordinati, e come descrivansi le projezioni per le quali essa linea obbiettiva è determinata.	10.	12.	§	7.	9.
Modo d' esprimere una retta costituita nello spazio, secondo qualsivoglia condizione.	12.	13.	§	10.	
Problemi, e Teoremi relativi alla linea retta.	13.	19.	§	11.	14.
Problemi relativi alla combinazione di due rette.	19.	23.	§	15.	19.
Considerazioni sopra le linee curve.	23.	30.	§	20.	28.
CAP. III. Della Superficie.					
Metodo generale per esprimere colle projezioni la forma, e la posizione di qualunque superficie.	30.	32.	§	29.	31.
Considerazioni, e problemi relativi ad un piano, la cui posizione sia data.	33.	36.	§	32.	36.
Considerazioni, e problemi relativi alla reciproca posizione d' un piano, e d' una retta.	36.	37.	§	37.	39.
Della combinazione di due piani che s' incontrino scambievolmente fra loro.	38.		§	40.	

Delle superficie coniche, e delle cilindriche. Pag. 38. 41. § 41. 44.
Di qualunque superficie generata da una retta che debba incontrare tre date direttrici in ogni sua posizione. 41. 46. § 45. 47.
Di qualunque superficie generata da una linea che debba descrivere con tutti i suoi punti altrettante linee paralelle ad una data. 46. 50. § 48. 52.
Delle superficie di rotazione. 50. 58. § 53. 58.
Delle superficie elicoidiche. 58. 59. § 59.
CAP. IV. Sopra la permutazione de' piani coordinati.
Trovare le projezioni d'un sistema di punti obbiettivi, sopra un piano dato di posizione relativamente ai piani coordinati. 59. 62. § 60.
Metodo per assegnare le projezioni dei dati punti obbiettivi sopra tre piani dati in qualunque posizione. 62. 70. § 61. 64
CAP. V. Delle intersecazioni, e dei contatti fra linee e superficie, e fra superficie.
Come si trovi l'intersecazione d'una linea con una superficie. 70. 72. § 65.
Del contatto fra una linea ed una superficie. 72. 74. § 66. 71.
Dell' intersecazione scambievole fra due superficie. 74. § 72.
Esempj sopra le intersecazioni scambievoli di alcune superficie più semplici. 74. 84. § 73. 80.
Del contatto fra due superficie. 84. 85. § 81.
Del contatto fra un piano con una superficie curva qualsivoglia. 85. 86. § 82. 84.
Del contatto d'un piano con una superficie conica, o cilindrica. 86. 87. § 85. 86.
Del contatto d'un piano con una superficie di rotazione. 87. 88. § 87.
Del contatto fra una superficie qualunque, e specialmente fra una superficie di rotazione, con una superficie coni-

ca, o cilindrica che la involga. Pag. 88. 91. § 88. 89.

CAP. VI. Problemi.

Sul modo di trovare il centro ed il raggio della sfera circoscritta, e dell' inscritta a ciascun solido regolare. 92. 104. § 90. 105.

Sul modo di trovare il centro ed il raggio della sfera circoscritta, e dell' inscritta ad una piramide scalena. 104. 108. § 106. 107.

Dati tre elementi d' un triangolo sferico, trovare tutti gli altri. 108. 120. § 108. 115

Sopra i limiti, fra i quali è contenuta la somma che possono formare, insieme presi, gli angoli d' inclinazione d' una retta obbiettiva coi tre piani coordinati. 120. 124. § 116. 119.

Sopra la ragione che ha l' area d'una figura piana alla sua projezione su ciascun piano coordinato, ed a tutte le tre projezioni insieme prese. 124. 126. § 120. 121.

Sopra le intersecazioni scambievoli di alcune superficie. 127. 133. § 122. 129.

Sopra il contatto delle superficie che son generate per la rotazione d' una curva conica intorno al proprio asse, e delle superficie coniche, o cilindriche, dalle quali siano involte. 133. 135. § 130. 132.

Sopra il piano tangente una superficie curva, e condotto per uno, o per due punti dati fuori di essa. 135. 138. § 133. 135.

Sopra il piano tangente due, o tre superficie curve. 138. 142. § 136. 138.

CAP. VII. Dei circoli osculatori, delle evolute, e delle evolventi.

Definizione del circolo osculatore in qualunque punto d' una curva piana. 142. 143. § 139. 140.

Della relazione che ha un' evoluta rispetto alla sua evolvente, essendo ambedue costituite in un medesimo piano. 143. 149. § 141. 146.

Sopra la superficie delle evolute di una curva piana. 149. 150. § 147.

Definizione del circolo osculatore in qualunque punto d' una curva di doppia curvatura. Pag. 150. 151. § 148.

Si dimostra che la curva data, e la sua projezione sul piano tangenziale relativo ad un qualunque punto di essa, hanno comune in quel punto il circolo osculatore. 151. 152. § 149.

Sopra la superficie degli assi d' una curva di doppia curvatura, e sopra le evolute costituite in quella superficie. 152. 160. § 150. 155.

Esame della teoria data dal Sig. Monge su questo argomento. 160. 165. § 156.

Altra dimostrazione. 165. 169. § 157. 159.

Si dimostra che la linea contenente i centri d' osculo d' una curva di doppia curvatura non può essere sua evoluta. 169. 170. § 160. 161.

Metodo per descrivere meccanicamente la superficie degli assi d' una curva di doppia curvatura. 170. 172. § 162.

Metodo per condurre da un dato punto una perpendicolare a qualunque curva data. 172. § 163.

CORREZIONI DA FARSI NELLA PARTE I.

Pag.	Lin.	Errori	Correzioni.
(IX)	21	*angolo*	*triangolo*
15	34	corolarj	corollarj
41	1	rivogliere	rivolgere
43	20	passa	passerà
82	6	a Π α.	alla Π α
99	8	sopraindicata	sopra indicata
122	31	Fig. 55. Sarà	Sarà
ivi	33	§ 119	Fig. 55. § 119
128	30	Tranne	Trattone
148	27	che passa	che passi
151	24	in *o*	in O
ivi	33	*r*, *o*	*r*, O
252	2	*r*, *o*	*r*, O
164	12	§ 156. Quantunque	Quantunque
169	*in calce*	(1) Feuilles etc.	(1) Feuilles d'Analyse etc.
170	17	§ 138	§ 158

Si potrà esprimere graficamente, cioè per mezzo di descrizioni lineari eseguite sopra una o più superficie, la forma, la grandezza, e la posizione di un solido determinato nello spazio, allorchè sappiasi esprimere la forma, la grandezza, e la posizione della superficie che lo termina.

Puossi considerare una superficie qualunque come descritta o percorsa da una linea la quale si mova con una data legge, e durante il suo movimento, o conservi immutata, o muti continuamente, se è d'uopo, la sua figura con una legge data.

Prendiamo ad esempio una superficie conica di base circolare. Noi potremo concepire che sia descritta o percorsa da una retta linea, la quale, mantenendo fermo un suo punto nel vertice di quella superficie, e scorrendo la circonferenza della sua base circolare, giri tutto intorno finchè sia ritornata al luogo ov'ebbe principio il suo moto. In tal maniera la retta descrive, o percorre, o genera, come suol dirsi, la superficie conica, e frattanto serba immutata la propria figura, giacchè supponghiamo che non si muti nè la forma di retta linea, nè la lunghezza finita, o indefinita, secondo che sarà data. Ora fingiamo che il centro della base circolare scorra sulla retta che lo congiunge col vertice, cioè sull'asse della superficie conica. Frattanto il piano della base sia sempre paralello alla sua prima posizione, e la circonferenza varii continuamente con questa legge, che il suo diametro si trovi sempre proporzionale alla distanza del centro dal vertice, tal che, supponendo che la base si accosti continuamente al

vertice, dovrà continuamente scemare il suo diametro, essendo il diametro che avrà in una posizione al diametro che avrà in un' altra consecutiva, come la distanza del centro nella prima posizione alla distanza che avrà nella seconda dal vertice predetto.

Ciò posto, la variante circonferenza del circolo mobile si troverà sempre nella supposta superficie conica, ed in tal modo può dirsi che questa è descritta, o generata dalla circonferenza mobile, la quale nel suo movimento soggiace alla variazione che abbiamo determinato.

Sarà dunque espressa la forma, la grandezza, e la posizione d' una superficie determinata, se esprimasi la forma d'una linea generatrice, ed insieme la legge cui deve ubbidire nel suo movimento, e quella cui soggiace colle sue variazioni durante il movimento medesimo.

Ogni linea puossi considerare descritta, o generata da un punto, il quale si mova nello spazio con una legge data. Adunque si esprimerà graficamente la forma, la grandezza, o la lunghezza, e la posizione di una linea se esprimasi ogni posizione in cui deve trovarsi il punto descrittore o generatore della linea medesima.

Per la qual cosa è conveniente mostrar da principio come si esprima la posizione di un punto nello spazio; poi come esprimasi la forma, grandezza, e posizione d' una linea; finalmente come esprimasi la forma, grandezza, e posizione d' una superficie.

CAPITOLO I.

Del Punto.

§. 1. Concepiamo tre piani i quali si taglino scambievolmente. Questi formeranno otto angoli solidi intorno al loro punto comune, e l'immensità dello spazio sarà per quegli angoli distinta in otto regioni, onde qualunque punto asse-

gnabile nello spazio o sarà contenuto entro uno degli indicati angoli solidi, o in uno dei tre piani che li comprendono. Rappresentiamo in O il punto comune a questi tre piani, e sia la retta XZ l'intersecazione del primo, determinato dai tre punti Z, X, V col secondo, determinato dai tre punti Z, X, Y. La YY' sia l' intersecazione del secondo col terzo, determinato dai tre punti V, V', Y. La VV' sia l' intersecazione del primo col terzo. Nominiamo per brevità I°, II°, III° i detti piani, rispettivamente, e tutti insieme dicansi fra loro *coordinati*. Fig. 1

Ora fingasi un punto nello spazio, e da esso condotta ad incontrare ciascun piano coordinato una retta paralella alla intersecazione degli altri due. Chiamiamo pure fra loro *coordinate* coteste rette. È manifesto che se da un altro punto dello spazio, costituito nella medesima regione, cioè nel medesimo angolo solido in cui fu posto il primo, sian condotte similmente le rispettive coordinate, queste saranno o tutte, o in parte diverse dalle prime, altrimenti il secondo punto coinciderebbe col primo, contro la nostra ipotesi. Che se pure le coordinate relative ad un altro punto dello spazio siano ordinatamente eguali in lunghezza a quelle del primo, e non pertanto cotesti due punti siano diversi, dovrà necessariamente uno di essi giacere in una delle otto regioni, e l'altro in un' altra.

Ciò posto, se ad un punto unico dello spazio deve appartenere un dato sistema di coordinate, ne segue che date le tre coordinate, ed assegnata da qual parte ciascheduna di esse debba essere costituita per rispetto al piano che deve incontrare, la posizione del punto relativo a queste coordinate sarà pienamente determinata.

Possiamo rappresentare in Π l'immaginato punto obbiettivo e le tre rette Πp, $\Pi p'$, $\Pi p''$ rappresenteranno le tre coordinate, delle quali la Πp, si riferisce al piano I°, la $\Pi p'$ al piano II°, la $\Pi p''$ al III°. I punti p, p', p'' si chiamino projezioni del punto obbiettivo Π.

Per ciascheduna coppia $\Pi p - \Pi p'$, $\Pi p' - \Pi p''$, $\Pi p - \Pi p''$ si conduca un piano, che dovrà essere paralello ad uno dei tre piani coordinati. In tal modo avremo tre nuovi piani $\Pi pp'$, $\Pi p'p''$, $\Pi pp''$ che hanno comune il punto obbiettivo Π, e dalla combinazione di essi coi tre piani coordinati nasce il parallellepipedo espresso nella Fig. 1. Adunque la retta OY eguaglia la Πp, la OV eguaglia la $\Pi p'$, la OK eguaglia la $\Pi p''$, e la posizione rispettiva delle OK, OV, OY è simile alla posizione rispettiva delle $\Pi p''$, $\Pi p'$, Πp; perciò le tre precedenti si assumono in luogo delle tre coordinate $\Pi p''$, $\Pi p'$, Πp.

Essendo paralellogrammo il quadrilatero OKpV, e perciò OK eguale e paralella alla Vp, come Kp eguale e paralella alla OV, il punto p è determinato quando siano determinate le due rette OK, OV. Similmente si vede essere determinato il punto p' per le due OK, OY, e così il punto p'' per le due OV, OY. *Adunque sopra ciaschedun piano coordinato è determinata la projezione del punto obbiettivo per le due coordinate riferite agli altri due piani.*

Per converso, *essendo data la projezione del punto obbiettivo sopra un piano coordinato, saranno per essa determinate le due coordinate che riferisconsi agli altri due piani.* Imperciocchè è manifesto che, dato sul piano I° il punto p come projezione d'un punto obbiettivo, sono determinate le due pK, pV, e lo stesso diciamo rispetto alle projezioni date sugli altri piani II° e III°. *Adunque due projezioni d'un medesimo punto obbiettivo, date su due piani coordinati, determinan le tre coordinate di quel punto e quindi esprimono la sua posizione nello spazio.*

§. 2. Immaginiamo che il piano II°, rotando intorno alla XZ, venga a porsi sul piano I° in modo che ambedue formino un solo e medesimo piano, ciò che si rappresenta nella Fig. 2.

Fig. 2 Rimanendo determinati in questi due piani i punti p e p' rispettivamente alla XZ, che tuttavia rappresenta la comune sezione dei piani I° e II°, alla VV' che rappresenta la co-

mune sezione dei piani I° e III°, alla YY' che rappresenta la comune sezione dei piani II° e III°, quei punti medesimi p, p' non cesseranno di significare le medesime cose di prima. In fatti, conducendo pel punto p la pK paralella alla OV e la pV paralella alla OZ, saranno determinate le due pK, pV che sono le due coordinate del punto obbiettivo riferite ai piani II° e III°, rispettivamente; così per la descrizione della p'K è manifesto che si determina la terza coordinata riferita al piano I°. Dunque abbiamo espresso nella Fig. 2 tutto ciò che è necessario per determinare la posizione del punto obbiettivo corrispondente alle due projezioni p, p'.

E per mettere maggiormente la cosa in chiaro diremo che il punto p, dato come projezione sul piano I°, ci mostra dover essere il punto obbiettivo in una retta che passa per p ed è paralella alla comune sezione dei due piani II° e III° allorchè sono costituiti nella vera posizione loro, come si rappresenta nella Fig. 1. La descrizione poi dell'altra projezione p' e della retta p'K, per essa determinata, significa che il punto obbiettivo si trova nella mentovata retta che passa per p, è posto a tale distanza dalla projezione p quant'è la lunghezza p'K, ed è costituito dalla parte superiore del piano I° rappresentato in quello della Fig. 2. Che se il punto obbiettivo fosse posto dall'altra parte del piano I°, questa circostanza sarebbe stata indicata dal trovarsi il punto p' dalla parte opposta rispetto alla retta XZ, cioè nel prolungamento della p'K oltre K.

Ciò che fu detto delle projezioni date sui due piani I° e II° conviene pure e al caso che sian date sui due piani I° e III°, e al caso che siano date sui due II° e III°. Laonde la posizione di un punto può essere completamente espressa per descrizioni eseguite sopra un solo piano, come dimostra la Fig. 2.

§. 3. Rappresentando XZ la comune sezione dei due piani I° e II°, ciascheduna delle due parti, nelle quali es-

sa divide il piano della figura, ha doppio ufficio. Ed in vero la parte X*p*Z che rappresenta immediatamente il piano I°, e contiene le projezioni dei punti che sono dalla parte anteriore per rispetto al piano II°, nón potrà contenere quelle dei punti che sono dalla parte posteriore di esso. Le projezioni di cotali punti, se fossero descritte sul piano I°, dovrebbero cadere nel suo prolungamento oltre la retta XZ posteriormente al piano II°, e perciò, allorchè questi due piani scambievolmente si adattano nella maniera che fu indicata §. 2, le dette projezioni verrebbero nella parte X*p*'Z del piano di descrizione, dalla quale si rappresenta immediatamente il piano II°. Quella parte medesima X*p*'Z rappresenterà dunque ad un' ora ed il piano II° ed il prolungamento del piano I° posteriormente al II°. In modo simile si dimostra che avendovi alcun punto obbiettivo collocato inferiormente per rispetto al piano I°, la sua projezione sul piano II° verrebbe a cadere nella parte X*p*Z del piano di descrizione, la quale rappresenta immediatamente il piano I°; ma rappresenta ancora il prolungamento del piano II° oltre la XZ al di sotto del piano I°. Adunque in ciascheduna delle due parti X*p*Z, X*p*'Z potranno cadere e le projezioni spettanti al piano ch' essa immediatamente rappresenta, e quelle che spettano al prolungamento del piano rappresentato immediatamente dall' altra parte. Nascerà dunque incertezza se le projezioni descritte in una delle due parti predette si debbano riferire più veramente all' uno che all' altro dei due piani coordinati. Perciò conviene trovare una maniera di togliere l' equivoco; al qual uopo basterà opportunamente la semplice convenzione che sian notati con lettere majuscole i punti i quali debbonsi intendere nel piano I°, qualunque sia la parte del piano di descrizione ove cadono, e con lettere minuscole si notin quelli che dobbiamo intendere sul piano II°. Occorrendo poi la necessità di far uso ancora del piano III°, le projezioni dei medesimi punti si noteranno colle medesime lettere minori adoperate nel piano II° e vi si ag-

giugnerà il contrassegno d'una lineetta o d'un apice secondo veggasi più comodo.

Per condurre nel debito modo le coordinate pK, pV e determinare le lunghezze loro, essendo date le due projezioni p, p' del punto obbiettivo, è necessario che oltre alla XZ sia descritta una delle due rette OY, OV. Ma la posizione reciproca delle rette OK, OV, OY intorno al punto O dipende dalla inclinazione scambievole dei piani coordinati, che può variare indefinitamente. Affinchè dunque non sia mestieri annunziare in ogni caso particolare le condizioni arbitrarie dei piani coordinati, si convenne di intenderli sempre normali scambievolmente fra loro, quando non v' abbia espresso avviso di qualche ipotesi differente. In questo sistema le coordinate dei punti obbiettivi eguagliano le rispettive distanze di essi dai piani coordinati, e le XZ, VV' si trovano ad angoli retti, onde rettangolo diviene il paralellogrammo Op della Fig. 2, e quindi le due coordinate pK, Kp', le quali incontrano in K la comune sezione XZ, costituiscono una sola e medesima retta allorchè i due piani I° e II° sono collocati nella maniera indicata dal §. 2. Adunque se p e p' siano, Fig. 3, le projezioni di un medesimo punto obbiettivo, la Fig. 3
retta pp' dovrà segare ad angoli retti in K la comune sezione XZ. Le projezioni descritte in quest' ipotesi chiamansi rette per distinguerle dalle altre dette oblique, ma per l' ammessa convenzione dei piani normali si fa uso ordinariamente delle projezioni rette, e chiamansi semplicemente projezioni, quando non abbiavi eccezione particolare ed espressa per la quale convenga adoperare le oblique.

§. 4. Unico è il punto dello spazio corrispondente a due date projezioni p, p'; ma da ciò non segue che in generale bastino sempre le projezioni date sopra due piani coordinati per determinare qualunque sistema di punti obbiettivi, come alcuno ha pronunziato, mostrando di non badare quanto conviene all' ufficio del terzo piano.

Sian proposti i punti P, C, D sul piano I° ed i corris- Fig. 4

pondenti p, c, d sul II°, come projezioni di punti obbiettivi determinati nello spazio. Suppongo che la retta la quale unisce i due P, p sia normale alla comune sezione XZ in K, e quella che unisce i due C, c sia pure normale in M alla stessa XZ, e passi ancora pei due rimanenti D, d. È manifesto che un punto obbiettivo si determina dalle due projezioni P, p, e due punti obbiettivi, almeno, sono rappresentati dalle rimanenti projezioni C, D, c, d; ma questa rappresentazione grafica da per se sola non esprime se la projezione C sul piano I° debba essere combinata coll' una o coll' altra delle due c, d, date sul piano II°. Supponghiamo descritte ancora sul piano III° le projezioni di quei medesimi punti obbiettivi che devono corrispondere alle già date C, D, c, d, e, rotando il piano III° intorno alla sua comune sezione col I°, venga ad applicarsi sopra di esso, ed in tal posizione sia rappresentato nella parte XOV del piano di descrizione. Siano c', d' le projezioni rispettive dei punti menzionati, e la retta la quale unisce i due punti C, c' dovrà esser normale in un punto N alla OV, come pure normale a questa sarà in un punto Q la retta che unisce i due punti D, d' § 3. Ciascheduna poi delle due coordinate Nc', Qd' deve eguagliare una delle due Mc, Md §. 1. Supponendo dunque che la Nc' eguagli la Mc, e la Qd' eguagli la Md, sarà tolto ogni dubbio, conoscendosi che le due projezioni C, c vanno insieme combinate, e per conseguenza combinate pure insieme le due D, d.

§. 5. Le due projezioni che appartengono ad un medesimo punto obbiettivo soglion esser notate con lettere cognomini, una majuscola, e l' altra minuscola, come appunto le C, c. Coll' osservanza di questa regola si toglie per lo più il dubbio ora accennato, e rendesi perciò superflua la descrizione sul piano III°. Ma appunto il bisogno di cotale espediente prova l'insufficienza delle due projezioni a rappresentare, in generale, qualunque sistema di punti obbiettivi, la qual cosa sarà osservata altre volte in progresso.

§. 6.

§. 6. I piani coordinati che abbiamo immaginato possono esistere in realtà, come il piano d'un pavimento, d'una parete, e simili, o pure, sebben non esistano materialmente, possono tuttavia essere determinati in modo da conoscere le distanze che ha da essi qualunque punto assegnabile nello spazio. A cagion d' esempio il piano orizzontale rispettivo ad un punto della superficie terrestre può corrispondere a quello che abbiam chiamato piano I°. Sopra di esso possiamo stabilire due piani verticali e fra loro perpendicolari, i quali, ancorchè non esistano effettivamente, posson essere ciò nulla ostante determinati di posizione determinando le due rette ove tagliano il supposto piano orizzontale. Uno di questi due piani corrisponderà a quello che abbiam chiamato piano II° e l' altro a quello chiamato piano III°. Volendo dunque rappresentare sopra un piano di descrizione i tre predetti piani ai quali intendiamo riferiti i punti dello spazio, se il piano di descrizione sia, come nei nostri esempj, un foglio di carta, esso rappresenterà immediatamente il piano I° e descrittavi sopra una linea retta XZ Fig. 4., questa Fig. 4
rappresenterà l' intersecazione del supposto piano orizzontale con uno dei verticali che potrà essere il II°. Preso poscia nella XZ un punto arbitrario O, ci rappresenterà quello ove scambievolmente si tagliano le due rette d'intersecazione degli immaginati piani II° e III° col I°.

Ciò premesso, assumeremo un modulo che rappresenti quello col quale furono misurate le distanze dei punti obbiettivi dai tre piani coordinati. Siano a, b, c le distanze di uno qualsivoglia tra questi punti, la prima relativa al piano I°, la seconda al II°, la terza al III°. Sul nostro modulo, o scala della descrizione prenderemo tre misure a', b', c' proporzionali ordinatamente alle tre a, b, c, e principiando dal punto O porremo OK eguale alla c'; descritta una retta indefinita normale in K alla XZ, prenderemo sopra di essa la misura K p eguale alla a' e la K P eguale alla b'. I due punti P, p rappresenteranno esattamente la posizione del punto

obbiettivo, come si rende manifesto da tutto ciò che fu detto precedentemente. Per queste ragioni s' intenderà sempre in avvenire che il piano di descrizione sia quello che rappresenta il piano I°. Piano II° si dirà quello che insiste al I° sulla XZ, e piano III° quello che s' intende condotto per O normale ai due precedenti. Per agevolare il discorso congiungeremo con una lineetta orizzontale quelle due lettere che denotano due projezioni di un medesimo punto obbiettivo, cioè scrivendo P — *p* si mostrerà che due punti P, *p* sono projezioni di un punto obbiettivo per esse determinato.

CAPITOLO II.

Della Linea.

§. 7. Fingo proposta una linea qualunque nello spazio,
Fig. 5 ed immagino una retta mobile sotto queste condizioni, cioè che la sua direzione sia sempre normale ad uno dei piani coordinati, ponghiamo al piano I°, ed inoltre la sua lunghezza varii continuamente come è mestieri perchè, un suo estremo essendo sempre nel detto piano I°, l' altro estremo scorra tutta la linea obbiettiva. Adunque mentre quest' estremo descrive l' obbiettiva, l' altro descriverà una linea sul piano I°, che sarà projezione dell'obbiettiva medesima, giacchè ogni punto assegnabile in questa avrà sul piano I° la sua projezione nell' altra. Osserviamo pure che il punto descrittore dell' obbiettiva e la corrispondente projezione di esso trovansi sempre ad eguali distanze dal piano II° e ad eguali distanze dal piano III°, e perciò quando sia nota la legge con cui si corrispondono le coordinate del punto descrittore riferite ai due piani II° e III°, si avrà quant' è d' uopo per descrivere sul piano I° la projezione dell' obbiettiva. In fatti assegniamo ad arbitrio quante coordinate si voglia O*a*, O*a'*, O*a''*, ec. riferite al piano III°, e per la data legge verranno determi-

nate le corrispondenti aP, $a'P'$, $a''P''$ ec. riferite al piano II°. Adunque saranno determinati sul piano I° quanti punti si voglia P, P', P'' ec. tutti spettanti alla projezione cercata. Similmente essendo data la legge con cui si corrispondono le coordinate riferite ai due piani I° e III°, potremo descrivere la projezione sul II°. Imperocchè dalla mentovata seconda legge verranno determinate le ap, $a'p'$, $a''p''$ ec. corrispondenti alle già date Oa, Oa', Oa'' ec., onde avremo quanti punti si voglia della seconda projezione $p\ p'\ p''$ ec., e similmente concludasi della projezione che può essere descritta sul piano III°.

Nel complesso dei dati pei quali è determinata una linea, di forma, grandezza, e posizione, deve essere contenuta l' espressione della legge secondo la quale si corrispondono le coordinate variabili del punto descrittore o generatore combinate a due a due, e quindi *se la linea obbiettiva è compiutamente determinata, i dati debbono contenere tutte le nozioni che son necessarie per costruire ciascuna projezione di essa, siccome, reciprocamente, l' obbiettiva è determinata dalle sue tre projezioni.*

§. 8. Egli è ben vero che d' ordinario si rappresenta una linea con due sole projezioni; ma da ciò non si deve inferire che la terza projezione sia, generalmente, superflua. La prova di questa proposizione fu già data nel §. 4.; ciò nulla ostante riprodurremo sott' altro aspetto il medesimo esempio a maggior comodo di quelli che non hanno l' immaginazione prontissima in cotali materie.

Siano dunque descritte le due projezioni P P'P'' ec. — $pp'p''$ ec. d'una linea e, assegnato nella prima di queste projezioni un punto P, sarà desso la projezione sul piano I° d' un punto corrispondente nell' obbiettiva §. 3. Per trovare le tre coordinate di cotal punto si condurrà per P una retta Pap normale alla comune sezione XZ, producendola a segare in p la seconda projezione $pp'p''$ ec.; ed accadendo solamente in p la intersecazione della retta Pap colla linea $pp'p''$ ec., non è dub-

bio che sia p la projezione seconda corrispondente alla prima P e quindi sarà dalle projezioni P—p determinato un punto dell' obbiettiva, il quale avrà le coordinate Oa, aP, ap. Se dunque, nel modo stesso, a tutti i punti assegnabili sulla projezione P P'P'' ec. si possa trovare i corrispondenti nella projezione $pp'p''$ ec., l' obbiettiva sarà determinata dalle due projezioni perchè ogni suo punto è per esse determinato.

Fig. 6 Ma passiamo ora alla Fig. 6, ove assegnando un punto P' sulla prima projezione P P'P'' ec. e conducendo per esso la retta P'a' normale alla XZ, il prolungamento di questa retta va a segare in due punti p', p'' la seconda projezione $pp'p''$ ec. È dunque incerto se la projezione P' debba esser combinata colla p' o colla p''; anzi, poichè la retta a'P', prolungata oltre P', va a segare in un altro punto P'' la stessa projezione P P'P'' ec., ne viene che tanto P', quanto P'' potrebbero essere combinati con ciascheduno dei due p', p'', nè potrà esser tolto il dubbio senza l' intervento della terza projezione o di qualche dato equivalente, come quello che fu indicato nel §. 5, secondo il quale dobbiamo concludere nell'esempio nostro che l'arco dell' obbiettiva projettato in P'P'' sul piano I° ha sul piano II° le projezioni de' suoi termini nei punti corrispondenti p', p'', e da ciò essendo indicata la posizione della linea obbiettiva, potremo determinare ogn' altro suo punto.

§. 9. Premesse queste nozioni generali, sia stabilito che per indicare due projezioni d' una linea obbiettiva useremo una linea orizzontale frapposta ai due sistemi di lettere per le quali son nominate le due projezioni. Così nell' esempio nostro, scrivendo PP'P''—$pp'p''$, si viene ad indicare che le due linee PP'P'' ec., $pp'p''$ ec. sono projezioni d' una medesima obbiettiva. Ciò posto, passiamo a considerare il caso che l' obbiettiva sia una retta.

§. 10. Pongasi primamente che la retta obbiettiva sia finita. E perchè unica è la retta la quale unisce due punti dati, è chiaro che questa sarà determinata quando siano de-

terminati di posizione i suoi estremi. In oltre, applicata al caso presente la supposizione che abbiam fatto nel §. 7, l'immaginata retta mobile, che descrive la projezione dell' obbiettiva, si troverà sempre in un medesimo piano condotto per l'obbiettiva e perpendicolare al piano sul quale fingiamo descritta la projezione. Questa sarà dunque nella retta ove il piano immaginato sega il piano della projezione; ma questa medesima projezione dovrà essere terminata in que' punti ove sono projettati i due estremi dell' obbiettiva; dunque, descritte le projezioni di cotesti termini, la retta che le congiunge sarà projezione dell' obbiettiva.

Che se dessa è indefinita nella sua lunghezza, pure indefinita sarà, generalmente, la projezione e questa si determinerà per le projezioni di due punti assegnati ad arbitrio nell' obbiettiva: dico poi generalmente perchè la projezione di una retta sopra un piano può divenire un punto, cioè nel caso che la retta sia normale al piano della projezione.

Se due projezioni di una retta obbiettiva non sian normali alla comune sezione dei due piani coordinati sui quali son date, basteranno ad esprimere compiutamente le condizioni dell' obbiettiva, perchè una retta normale alla menzionata comune sezione non potrà incontrare in più d'un punto ciascheduna delle due projezioni, onde, per ciò che vedemmo nel §. 3, ogni punto dell' obbiettiva sarà determinato. Ma può avvenire che ambedue le projezioni riescano perpendicolari alla detta comune sezione, ed allora si confondono in una sola e medesima retta, nè potranno esprimere le condizioni tutte dell' obbiettiva, ma sarà necessaria la projezione del piano III°, o qualche indicazione equivalente.

§. 11. Date sopra i due piani I° e II° le projezioni PP'—*pp'* di una retta, si dimanda 1° il punto d'incontro, 2° l'angolo della sua inclinazione con ciascun piano coordinato, 3° la sua lunghezza reale. Fig. 7

1.° Prodotta la projezione *p'p* fino a segare in *a''* la comune sezione XZ, si conduca per *a''* la retta *a''*Q perpendicola-

re alla stessa XZ, producendola finchè incontri in Ω la P'P, prolungata anch' essa se sia mestieri; dico essere Ω il punto dove l' obbiettiva incontra il piano I°.

Imperciocchè essendo questo punto nel piano I°, se vogliasi avere la sua projezione sul piano II°, dovrà essa trovarsi nella retta XZ, nella quale sono le projezioni sul piano II° di tutti i punti assegnabili nel piano I° §. 1. Ma la projezione predetta dev' essere ancora nella $p'p$ §. 10. Dunque sarà comune e alla stessa $p'p$ ed alla XZ, ciò che non può avverarsi se non pel punto a''. Sarà dunque a'' la projezione sul piano II° del punto d' incontro cercato. Il punto stesso deve quindi trovarsi nella retta a''Ω. Ma si deve trovare ancora nella P'P; dunque sarà in Ω.

2.° Pel punto P' sia condotta normale alla retta PP' la P'Π' ed eguale alla distanza $a'p'$ del punto p' dalla XZ. Si tiri la retta ΩΠ', e sarà l' angolo Π'ΩP' misura dell' inclinazione che ha l' obbiettiva col piano I°.

Imperciocchè immaginiamo che il triangolo ΩΠ'P', rotando intorno alla sua base ΩP', si elevi col proprio piano ad angoli retti sul piano I°. Divenuta normale ad esso la P'Π', il punto Π' coinciderà con quello che è determinato dalle projezioni P'—p'. Perciò la retta Π'Ω coinciderà coll' obbiettiva. Ma nell' immaginata posizione la Π'Ω forma l' angolo d' inclinazione Π'ΩP' col piano I°; dunque ancora l' obbiettiva sarà ad esso inclinata secondo il detto angolo.

3.° Posta la costruzione precedente, pel punto P si conduca normale alla P'Ω la PΠ che incontri in Π la Π'Ω; dico essere la retta Π' Π eguale in lunghezza all' obbiettiva.

Imperciocchè, rimettendo il triangolo Π'ΩP' nella posizione precedentemente indicata, allorchè il punto Π' coinciderà coll' estremo dell' obbiettiva projettato in P'—p', ancora il punto Π coinciderà manifestamente coll' estremo projettato in P—p. Dunque la Π' Π coinciderà coll' obbiettiva e quindi la eguaglierà in lunghezza.

Le medesime costruzioni si eseguiranno relativamente a

ciascuno degli altri piani. E per quanto spetta alla determinazione della lunghezza, si osservi in primo luogo che la retta PΠ riesce necessariamente eguale alla *a p* la quale misura la distanza della projezione *p* dalla XZ. Perciò, tirando per Π una retta Π Π'' paralella alla PP', si formerà il triangolo rettangolo Π Π' Π'' ove la Π' Π è l'ipotenusa, la Π Π'', eguale alla P P' è un cateto, e la Π' Π'' è l'altro cateto, il quale eguaglia la differenza delle due *a'p'*, *ap*, cioè delle due coordinate degli estremi riferite al piano I°, relativamente al quale fu eseguito il problema. In simil modo, condotta per P una paralella alla *a a'*, si formerà un triangolo rettangolo, in cui P P' sarà ipotenusa, un cateto eguaglierà la *a a'*, cioè la differenza delle due coordinate O*a'*, O*a* riferite al piano III°, l'altro cateto poi eguaglierà la differenza delle due *a'* P', *a* P che sono le due coordinate riferite al piano II°. *Adunque il quadrato della* Π Π', *cioè dell' obbiettiva, eguaglia la somma dei quadrati che si descrivono dalle differenze che hanno fra loro le coordinate omologhe degli estremi*, intendendo per omologhe quelle che si riferiscono al medesimo piano.

Questo teorema suppone che gli estremi della retta obbiettiva siano ambedue dalla medesima parte rispetto a ciascun piano. Se uno poi fosse di quà, l'altro di là d'uno dei detti piani coordinati, come rappresenta la Fig. 8 ove un estremo è da una parte del piano I°, l'altro è dalla parte opposta §. 3, il punto d'incontro Ω si troverà fra le projezioni dei due estremi P, P' e le due rette P'Π', PΠ procederanno, secondo la costruzione insegnata, a parti opposte, onde segue che il cateto Π' Π'', il quale nel primo caso eguagliava la differenza delle coordinate riferite al piano I°, si troverà eguale, nel caso presente, alla somma delle coordinate medesime. Fig. 8

§. 12. Innanzi di progredire a nuove indagini, giova raccogliere dalle cose dimostrate i seguenti corollarj.

I. Se quante rette obbiettive si voglia concorrano in un

punto dello spazio, ancora le projezioni loro su ciascun piano coordinato concorreranno nella projezione di quel punto §. 1.

2.° Reciprocamente se le projezioni di quante rette si voglia su ciascun piano coordinato concorrano in un punto e la retta che unisce il punto ove concorrono le projezioni descritte in un piano col punto ove concorrono le descritte in un altro piano sia perpendicolare alla comune sezione dei due piani stessi, le rette obbiettive corrispondenti alle date projezioni concorreranno in un punto dello spazio determinato da quelli ove concorrono, rispettivamente, le projezioni su l'uno e su l'altro piano §. 3.

3.° Se le rette obbiettive saran paralelle, paralelle pure saranno fra loro le projezioni descritte su ciascun piano coordinato, e per converso, essendo fra loro paralelle le projezioni su ciascun piano coordinato, saranno fra lor paralelle le obbiettive corrispondenti.

4.° Descritta sopra un piano coordinato la projezione d'una retta, l'angolo non maggiore d'un retto, che essa projezione formerà colla comune sezione del detto piano con un secondo piano coordinato, si potrà chiamar projezione dell'angolo d'inclinazione che forma la retta obbiettiva col detto secondo piano.

5.° Adunque l'angolo d'inclinazione che una retta forma con un piano coordinato non può mai superare in grandezza la sua projezione determinata su ciascheduno degli altri due piani.

6.° Perciò due angoli d'inclinazione formati da una medesima retta con due piani coordinati non potranno mai, presi insieme, superare un retto.

7.° Che se la somma composta dai due angoli predetti eguaglia un retto, il terz'angolo è necessariamente nullo, e reciprocamente.

§. 13. Dei tre angoli d'inclinazione formati da una retta coi tre piani coordinati, ciascheduno è determinato dai due rimanenti.

Qua-

Qualunque sia la retta data, fingiamone condotta per l'origine delle coordinate un'altra ad essa paralella. Questa sarà egualmente inclinata che la prima rispetto a ciascun piano coordinato.

Nominiamo R una sua qualunque porzione che principii dalla detta origine, e dall'altro estremo intendiamo condotta una normale su ciascun piano coordinato. Assunta come raggio o seno tutto la mentovata porzione, le tre normali già condotte corrisponderanno rispettivamente ai seni degli angoli d'inclinazione. E perchè la somma dei quadrati descritti da quelle tre normali eguagliar deve il quadrato della R, ne segue che la differenza tra cotesto quadrato e ciascheduno dei tre altri eguaglierà la somma dei due rimanenti, cioè, riducendo in termini trigonometrici questa proposizione, *il quadrato del coseno di un angolo eguaglierà la somma dei quadrati che si descrivono dai seni degli altri due.*

§. 14. Determinare le projezioni d'una retta, la quale passi per un punto dato nello spazio e formi angoli dati d'inclinazione coi piani coordinati.

Per le cose dimostrate superiormente, basterà che sien dati due soli dei tre angoli, onde il terzo sia noto. Sia dunque srz quello che l'obbiettiva formerà col piano III°, trx quello che formerà col I°. Fatte eguali le rs, rt, sian calate sulla xz le due normali sz, tx. Fig. 9

Pongasi zu eguale a tx, e sopra la sr descritto il semicircolo $su'r$, si adatti in esso la su' eguale alla su che unisce i due punti s, u, e si descriva la $u'r$.

Poscia nella comune sezione XZ dei due piani I° e II° si prenda la Oα eguale alla sz, e pel punto α conducasi la retta Aαa della quale la parte αa si eguagli alla tx, e la αA alla ru'.

Condotte le due rette OA, Oa, saranno esse projezioni di una retta che forma gli angoli dati d'inclinazione coi piani I° e III°, e l'angolo dipendente dai due dati col piano II° §. 13.

Ora se K — k siano le projezioni del punto dato, conducendo per K la KG paralella alla AO, e per k la kg paralella alla aO, saranno KG — kg projezioni di una retta pa-

ralella a quella projettata in aO—AO §. 11. E perchè l' obbiettiva delle KG — kg passa pel punto dato, essa soddisferà al quesito.

Ma quattro, e non una sola, sono le rette che soddisfanno del pari, siccome, conducendo dalla parte opposta della YY' un'altra retta a'A' paralella alla stessa YY' e distante da essa quant'è la misura Oα, la circonferenza descritta col centro O e coll' intervallo OA segherà in due punti la retta aA, ed in due punti la retta a'A', onde vengono determinate quattro diverse posizioni che può avere una retta intorno al punto O, formando i medesimi angoli d' inclinazione coi piani coordinati.

Per concepire più facilmente coll' immaginazione il sistema di queste quattro rette pongasi l'angolo A'OY' eguale all'angolo Y'OA, e la retta OA' eguale alla OA: similmente si ponga l'angolo a'OY eguale all'angolo YOa e la Oa' eguale alla Oa.

La projezione OA sul piano I° può essere comune a due rette egualmente inclinate a ciascheduno dei tre piani coordinati, ma l' una essendo costituita da una parte rispettivamente al piano I°, l' altra sarà dalla parte opposta; l' una avrà dunque per sua corrispondente projezione sul piano II° la retta Oa, l' altra avrà un prolungamento della a'O oltre O §. 3. Similmente la retta OA' può essere projezione comune a due altre rette obbiettive, l' una costituita da una parte e l' altra dalla parte opposta del medesimo piano I°, e perciò l' una avrà per sua corrispondente projezione sul piano II° la retta a'O, l' altra avrà un prolungamento della aO oltre O.

Dalle quali considerazioni s' inferisce che pel punto K conducendo due rette indefinite GH, G'H', l' una paralella alla AO e l' altra alla A'O: similmente conducendo pel punto k due rette gh, $g'h'$, l' una paralella alla aO e l' altra alla a'O, saranno così descritte le projezioni d' un sistema di quattro rette, ciascheduna delle quali soddisfà al quesito.

Le projezioni relative sono 1.ª GH — gh, 2.ª GH — $g'h'$, 3.ª G'H' — gh, 4.ª G'H' — $g'h'$.

§. 15. Date sopra due piani coordinati I° e II° le projezioni PQ — pq di una retta, e le projezioni R — r di un punto, descrivere quelle di un'altra retta che passi pel punto dato e formi colla retta proposta un dato angolo d' inclinazione. Fig. 10

Per un punto qualsivoglia Q della projezione PQ sia condotta in direzione perpendicolare alla XZ una retta che seghi in q l'altra projezione pq, e saranno Q — q projezioni di un punto spettante alla proposta obbiettiva §. 10.

Ora conduciamo due rette indefinite QR — qr, le quali saranno projezioni di una retta obbiettiva che passa pel punto dato.

Per la costruzione insegnata dal §. 11 troveremo i punti P', S, nei quali il piano I° è incontrato rispettivamente dalle rette projettate, l'una in PQ — pq, l'altra in QR — qr, e congiungeremo con una retta i punti P' ed S.

Poichè nella costruzione predetta si debbono produrre le rette qp, qr, l'una in p', l'altra in s a segare la comune sezione XZ, si trovi la lunghezza reale di quella che corrisponde alle projezioni QP' — qp', come pure dell'altra corrispondente alle projezioni QS — qs, alla prima delle quali lunghezze sia eguale il lato P'Q', all'altra il lato SQ' del triangolo P'Q'S che si costruirà sulla base P'S.

Ciò fatto, condurremo pel punto R una retta in direzione perpendicolare alla P'S e secante in R' la SQ'. Pel punto R' si tiri la R'T' che formi in T' colla P'Q' l'angolo R'T'Q' eguale al dato. Inoltre per T' conducasi una retta in direzione perpendicolare alla P'S che seghi in T la P'Q. Tirata finalmente per T una perpendicolare alla XZ e prodotta a segare in t la $p'q$, se congiungeremo con una retta i punti t, r e con un' altra i due T, R, le tr — TR saranno projezioni d' una retta che soddisfà al quesito.

Imperciocchè fingiamo che, rotando intorno alla base P'S,

il triangolo P'Q'S si elevi finchè il suo piano adattisi a quello del triangolo formato dalla stessa P'S come base e dalle due rette, una projettata in P'Q — $p'q$, l'altra in qs — QS. Dovrà la P'Q' coincidere colla prima di esse e la SQ' coincidere colla seconda, onde nella prima cadrà il punto T' e nella seconda il punto R'. Quello avrà dunque la sua projezione nella P'Q sul piano I°, e questo avrà la sua projezione nella SQ. Ma la projezione del punto T' si dovrà pur trovare nella retta che passa per T' e T, atteso che il punto T', nella rotazione ideata, descriverà un circolo il cui piano sarà normale alla retta P'S, e perciò sarà projettato nella retta che passa per T' ed è normale alla PS, dunque la projezione del punto T' non potrà essere che nel punto T comune alla mentovata retta ed alla P'Q. Similmente poi si dimostrerà che allora quando col triangolo obbiettivo già indicato coinciderà il triangolo P'Q'S, ancora il punto R' avrà la sua projezione in R, trovandosi nella retta corrispondente alle projezioni QS — qs. Dunque nel detto caso la retta R' T' si troverà projettata nelle due TR — tr. Ma non cesserà perciò di formar l'angolo R' T' Q' colla P' Q', e questa coincide coll'obbiettiva data per le projezioni $p'q$ — P'Q; dunque formerà con essa l'angolo dato quella retta che è projettata in RT — rt.

§. 16. Basta l'ispezione sola della figura per dimostrare che due rette soddisfanno egualmente al quesito se l'angolo dato non eguagli il retto, perchè dal punto R' un'altra retta R' V' si poteva condurre a formar colla P' Q' l'angolo R' V' P' eguale all'altro R' T' Q', e si poteva continuare così la costruzione come il discorso per la R' V' come abbiam fatto per la R' T'. Ma essendo retto l'angolo dato, una sola normale si conduce per R' sulla PQ' e quindi essa sola risolve il quesito.

§. 17. Dall' esposta dimostrazione si deduce che ancora la retta condotta pei due punti Q, Q' è normale alla P'S, e questa circostanza somministra un accorciamento alla pro-

posta costruzione. Imperocchè, tirata per Q una retta indefinita normale alla P'S e trovata la sola lunghezza P'Q', col centro in P' e coll'intervallo eguale a questa lunghezza si descriverà un circolo che, segando la normale predetta, determinerà il punto Q' e quindi ancora la lunghezza SQ'.

§. 18. In quella medesima costruzione abbiamo il metodo per trovar l'angolo che formano insieme due rette date per le rispettive loro projezioni *pq*—PQ, QR—*qr* le quali s'incontrino nello spazio in un punto determinato dalle projezioni Q — *q*. Cotesto angolo avrebbe le sue projezioni P'QS — *p'qs* e la grandezza P'Q'S.

§. 19. Ora veggiamo in qual modo si determini la comune perpendicolare a due rette obbiettive, le quali nè siano paralelle nè possano fra loro incontrarsi.

Ponghiam essere PP'—*pp'* le projezioni dell'una, RR'—*rr'* quelle dell'altra. Poichè non sono paralelle, per ipotesi, le projezioni loro, nell'un piano o nell'altro o in ambedue, s'incontreranno §. 12; ma la retta che unisce cotali punti d'incontro in quest'ultimo caso non potrà essere normale alla comune sezione XZ. Se dunque pel punto S, dove incontransi le due projezioni RR', PP', si descriva una retta normale alla XZ, essa andrà a segare in un punto *y* la projezione *pp'* ed in un altro punto *s'* la projezione *rr'*. Per un punto T diverso da S e preso nella PP' sia condotta una retta normale alla XZ finchè seghi in *t* la *pp'* e conduciamo per T una TV paralella alla RR', come pure per *t* una *tv* paralella alla *r'r*; trovati poscia i punti P', V, dove le rette projettate, una in PP' — *pp'*, ed una in TV — *tv*, incontrano il piano I°, si descriva la retta P'V. A questa conduciamo una normale SM dal punto S, e dal punto medesimo facciasi partire una retta SYS' normale alla SM, sulla quale presa la parte SY eguale alla distanza del punto *y* dalla XZ e la parte SS' eguale alla simile distanza del punto *s'*, facciamo passare pei due punti M, Y una retta MY indefinita nella sua lunghezza. Fig. 11

Su questa retta MY si condurrà una perpendicolare S'Σ' dal punto S', un'altra perpendicolare si conduca dal punto Σ' sulla MS, e cada in Σ; Per Σ si tiri la ΣΦ paralella alla RR', che incontri in Φ la PP'. Per Φ si conduca la ΦΨ paralella alla ΣS, che incontri in Ψ la RR', e sarà ΦΨ sul piano I° la projezione della cercata normale comune alle due rette proposte, onde elevate dai punti Φ e Ψ due perpendicolari alla XZ, le quali vadano ad incontrare, una in Φ la retta *pp'*, ed una in ↓ la retta *rr'*, si avrà nella retta Φ↓ la seconda projezione della cercata normale comune.

Imperciocchè il punto corrispondente alle projezioni T—*t* appartiene alla retta data per le projezioni PP'—*pp'*, e la retta projettata in TV—*tv* è paralella alla seconda retta data per le projezioni RR'—*rr'* §. 12. Saranno dunque in un medesimo piano le due rette rispettivamente projettate in PP'—*pp'*, TV—*tv*: questo piano segherà il piano I° nella retta P'V §. 11, e sarà paralello alla retta projettata in RR'—*rr'*. Diciamo (K) per brevità cotal piano, e fingiam che il piano del triangolo SYM, rotando intorno alla SM, s'innalzi normale al piano I°. Sarà allora normale anche al piano (K). Inoltre, nell'immaginata posizione del piano SYM, il punto Y coinciderà col punto projettato in S—*y*, ed il punto S' coinciderà con quello che è projettato in S—*s'*. Adunque allora la retta MYΣ' si troverà nel piano (K) ed il punto S' sarà nella retta corrispondente alle projezioni RR'—*rr'*. Laonde la retta S'Σ' sarà normale al piano (K), ed avrà sul piano I° la sua projezione in SΣ, essendo in Σ la projezione del punto ov' essa incontra il detto piano (K). Perciò qualunque retta si conduca normale sul piano (K) da un punto della retta projettata in RR'—*rr'*, sarà eguale alla S'Σ' ed avrà sul piano I° la sua projezione eguale e paralella alla SΣ.

In oltre se dal punto del piano (K) che è projettato in Σ sia condotta nel piano stesso una retta paralella a quella che è data per le projezioni RR'—*rr'*, avrà sul piano I° la

sua projezione nella $\Sigma\Phi$ §. 12. E perchè la retta accennata deve segare in qualche punto l' obbiettiva corrispondente alle projezioni PP' — *pp'*, non potrà cotale intersecazione avvenire in altro punto che in quello corrispondente alla projezione Φ sul piano I°, dove s' incontrano le $\Sigma\Phi$, P'P. Se ora intendiamo che da quel punto sia innalzata una normale al piano (K), essa in primo luogo sarà normale all' obbiettiva projettata in PP'—*pp'*, in secondo luogo incontrerà l' obbiettiva delle projezioni RR' — *rr'*, e finalmente la sua projezione sul piano I° sarà paralella ed eguale alla ΣS. Adunque sarà Ψ sul piano I° la projezione del punto d' incontro predetto coll' obbiettiva delle projezioni RR' — *rr'*, e perciò $\Phi\Psi$ sarà projezione sul piano I° della comune normale cercata, onde segue che la $\varphi\psi$ è l'altra projezione corrispondente sul piano II°.

§. 20. Passando dalle linee rette alle curve, osserviamo in primo luogo che per quanto concerne la determinazione dei punti ove queste possono incontrare alcuno de' piani coordinati, ciò che fu detto rispetto alle prime §. 11 conviene pure alle seconde. Imperciocchè se una linea qual si voglia incontra uno dei detti piani, e facciansi sopra un altro le projezioni dei punti d' incontro, queste cadranno nella comune sezione dei due piani; e devono pure trovarsi nella projezione dell' obbiettiva descritta sul secondo dei piani predetti; quelle projezioni sono dunque altrettanti punti comuni e all' intersecazione dei due piani e alla projezione dell' obbiettiva sul secondo di essi.

Pertanto se la curva projettata in MKN — *mkn* incontri il piano I°, la sua projezione sul II° incontrerà la XZ, come pure quella sul III° incontrerà la YY'. Supponghiamo che l' incontro con XZ accada in *k*, e sarà il punto d' incontro dell' obbiettiva col piano I° nella retta *k*K normale in *k* alla XZ e costituita nello stesso piano I°. Perciò sarà uno di quelli, nei quali la *k*K può incontrare la projezione MKN. Quando cotesti punti sian due, come K, K' o più, il Fig. 12

dubbio che potrebbe nascere talora se tutti siano punti d' incontro fra l' obbiettiva ed il piano I°, o alcuni, o uno solo, sarà tolto dall' indicazione delle lettere cognomini, come si dichiara nel §. 5, o si toglierà col soccorso della projezione descritta sul piano III°.

§. 21. Si voglia determinare la lunghezza dell' obbiettiva data per le projezioni MKN — *mkn*.

Troviamo prima la lunghezza della curva M K N (*) e sia posta eguale ad essa la retta $\mu\nu$, sulla quale prenderemo le parti $\lambda\lambda'$, $\lambda\mu$, $\lambda\nu$ ordinatamente eguali alle porzioni KK', KM, KN della M K N. Siano misurate le distanze dei punti *m*, *k'*, *n* dalla X Z, e condotte le $\mu 1$, $\lambda' 2$, $\nu 3$ normali alla $\mu\nu$, si faccia la $\mu 1$ eguale alla prima distanza, la $\lambda' 2$ eguale alla seconda, la $\nu 3$ eguale alla terza e così in seguito se altre pure ve n' abbia, avvertendo che la $\nu 3$ si dovrà applicare in senso opposto alle altre, come dimostra la figura, perchè il punto *n* nella projezione *m k n* cade inferiormente alla X Z mentre gli altri *k'*, *m* cadono superiormente. Ciò posto, dico in primo luogo che pei punti 1, 2, λ, 3 e quanti altri ancora siano determinati nella medesima maniera, dovrà passare una linea continua.

Imperciocchè ritorniamo all' ipotesi fatta nel §. 7 che una retta mobile, perpetuamente normale al piano I°, percorra con un suo estremo la curva M K N ec. mentre coll' altro estremo percorre o descrive l' obbiettiva corrispondente

(*) Questa proposizione è ordinata a mostrare come dalla rettificazione di una curva piana si passi a quella di una curva di qual si voglia forma e posta in qualunque modo nello spazio. Suppongo dunque adoprati i soliti metodi per la rettificazione delle curve piane se il problema richiegga rigore geometrico. Se poi basti un certo grado di approssimazione meccanica, si potrà diligentemente applicare alla curva MKN un sottil regolo flessibile uniformemente, sul quale, disteso che sia, misureremo la lunghezza rettilinea della curva e d' ogni suo arco assegnato.

te. La lunghezza dunque dell' immaginata retta mobile, sempre intercetta fra l' obbiettiva e la sua projezione M K N, varierà con una legge la quale dipende dalla forma e dalla posizione dell' obbiettiva medesima, e secondo cotesta legge, ad ogni arco MK', MK'K, MK'KN ec., che percorra la retta mobile, è determinata la corrispondente lunghezza ch' essa deve acquistare. V' ha dunque una legge costante, la quale ad ogni ascissa $\lambda\lambda'$ $\lambda\mu$, $\lambda\nu$, determina la corrispondente applicata $\lambda'2$, $\mu 1$, $\nu 3$ ec. Ma in ciò appunto consiste la continuità della linea che passa pei punti 1, 2, λ, 3 ec.; dunque pei detti punti e per tutti quelli determinati in egual modo passa una linea continua.

Dico in secondo luogo che la linea $1\,2\,\lambda\,3$ ec. eguaglia in lunghezza la proposta obbiettiva.

Imperciocchè supponghiamo inscritto in questa un poligono rettilineo, rappresentato in projezione dal poligono pur rettilineo M K' K N ec., il quale sarà inscritto nella curva M K' K N ec. Facciamo $\lambda\bar{\lambda}$ eguale al lato K K', $\bar{\lambda}\bar{\mu}$ eguale al lato K'M, $\lambda\bar{\nu}$ eguale al K N ec. Pei punti $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$ ec. siano elevate le rette $\bar{\lambda}\bar{2}$, $\bar{\mu}\bar{1}$, $\bar{\nu}\bar{3}$ ec. paralelle ed ordinatamente eguali alle corrispondenti $\lambda'2$, $\mu 1$, $\nu 3$ ec. e congiungansi i punti $\bar{1}$, $\bar{2}$, λ, $\bar{3}$ ec. con rette linee. Si formerà con esse un poligono rettilineo manifestamente eguale in lunghezza a quello che abbiam supposto inscritto nell' obbiettiva.

Ora osserviamo che quanto sarà maggiore il numero dei lati sì nell' uno come nell' altro poligono, tanto saranno più vicini i punti $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ ec. ai loro cognomini 1, 2, 3 ec. e quindi il poligono determinato dai primi si accosterà sempre più alla curva $1\,2\,k\,3$ ec. quanto più si accosta all'obbiettiva il poligono in essa inscritto. Ma cotali accostamenti possono essere inoltrati al di là d' ogni menoma differenza assegnabile; dunque l' obbiettiva è limite del poligono variabile che intendiamo in essa inscritto, e la curva $1\,2\,\lambda\,3$ ec. è limite dell'altro egual poligono, pur variabile, determinato dai punti $\bar{1}$, $\bar{2}$, λ, $\bar{3}$ ec. Perchè poi i poligoni si

corrispondono sempre nella ragione di eguaglianza, nella stessa ragione saranno i loro limiti, cioè la curva 1 2 λ 3 ec. eguaglierà in lunghezza l' obbiettiva.

Trovata dunque la lunghezza della curva 1 2 λ 3 ec., sarà fatto ciò che cercavasi.

§. 22. Esaminiamo ora le circostanze corrispondenti al caso che due linee si tocchino scambievolmente fra loro, e prima parliamo d' una curva e d' una retta.

Sia proposta una linea curva qual si voglia ed una retta che la seghi, almeno in due punti. Uno di questi chiamisi A, l'altro B. Fingiamo che la retta secante girando intorno al punto A, che supporremo immobile, avvicini continuamente ad esso l' altro punto d' intersecazione B fino a tanto che questo coincida con quello. Pervenuta la retta alla posizione corrispondente a tal circostanza, chiamasi allora tangente, e punto di contatto si chiama il punto A. Fingasi ora descritta sopra un piano la projezione dell' obbiettiva, e così pure descritte le successive projezioni della retta secante. Queste saranno altrettante secanti per rispetto alla curva ov' è projettata l'obbiettiva. Ma quando il punto B coinciderà col punto A, ancora la projezione del primo coinciderà con quella del secondo, e perciò la projezione della secante diverrà tangente per rispetto alla projezione dell' obbiettiva. Perciò *se una retta tocchi una curva nello spazio, ancora la projezione della retta sarà tangente la projezione della curva.*

Laonde essendo date le projezioni MKN — *mkn* di una curva e le due K — *k* d' un suo punto, la tangente in quel
Fig. 12 punto sarà determinata graficamente conducendo la tangente KT e l' altra *kt*, perchè saranno KT — *kt* projezioni della tangente che si vuol determinare.

§. 23. Sostituendo nell' ipotesi immaginata §. 22 una curva qual si voglia alla retta, si dirà in egual modo che la curva sostituita divien tangente per rispetto alla proposta quando il punto mobile B della seconda intersecazione coincide

col punto immobile A della prima. Adunque le due projezioni debbono reciprocamente divenir tangenti fra di loro.

§. 24. Immaginiamo una retta che passi sempre pel punto immobile A e per l' altro mobile B, nei quali si taglino le due curve. Quella retta segherà nei due punti medesimi le due curve, e diverrà tangente nel tempo stesso dell' una e dell' altra quando i detti due punti coincidono.

Adunque *due curve che siano a contatto hanno comune la retta tangente, e pur comune la retta tangente hanno le due projezioni, essendo quest' ultima tangente projezione della prima.*

Ma si osservi che la posizione di una retta linea è determinata per la sola condizione di essere tangente in un dato punto di una data curva. Non così avviene di una curva, la quale può in diverse posizioni toccar nel medesimo punto un' altra curva data di posizione e di forma. In fatti di due linee che si tocchino nel modo sopra definito in un dato punto, immaginiamo la comune tangente, e intorno a questa potrà rotare una delle due curve, prendendo così infinite posizioni diverse una dall' altra senza che cessi il contatto nel medesimo punto. Ma fra tutte le dette posizioni una ve ne ha che è distinta da un criterio particolare, di cui daremo in seguito la definizione.

§. 25. Gli angoli che forma una curvà incontrando una superficie o un'altra linea, sono quelli che forma la tangente della curva nel punto d' incontro colla detta superficie o colla tangente della detta linea. Se dunque una curva incontri uno dei piani coordinati, o un piano paralello ad un di essi, e vogliasi misurare l'angolo d' inclinazione che forma in quel punto d' incontro, noi determineremo la tangente che ad esso corrisponde ed il problema sarà ridotto a quello del §. 11.

Similmente se vogliasi misurare la scambievole inclinazione di due curve che si tagliano in un punto, determinate le rispettive tangenti nel punto d' intersecazione, il problema sarà trasformato in quello del §. 18.

§. 26. La normale d' una curva in un dato punto di

essa sappiamo che dev' essere perpendicolare alla tangente nel punto medesimo, ma questa nozione non basta a determinare generalmente la posizione della normale. Imperciocchè se la curva è piana, fra tutte le rette che possono essere perpendicolari alla tangente nel punto di contatto, la normale della curva è quella che giace nel piano della curva medesima. Ma quando essa ha doppia curvatura, cioè non può giacere in un piano, è d' uopo d' un altro criterio particolare che determini la posizione della normale.

Sia pertanto una curva a doppia curvatura costituita nello spazio, ed in essa un qualunque punto, cui nominerò A. Immaginiamo la tangente in A, e per questa passi un piano che seghi la curva in un punto B. Fingiamo che questo punto movasi sulla curva verso il punto A, e conseguentemente seco movasi il piano immaginato rotando intorno alla tangente. In questa maniera ad ogni posizione particolare del punto B corrisponderà una particolare posizione del piano rotante, e perciò, quando il punto B coincide col punto A, il detto piano deve trovarsi in una posizione determinata. In esso giacer deve allora la normale relativa al punto A.

Distinguo col nome di piano *tangenziale* quel piano rotante pervenuto nella posizione testè definita.

Fig. 13 §. 27. Date le projezioni BAC ec. — *bac* ec. di una curva e le due A — *a* di un punto assegnato in essa, descrivere le projezioni della normale relativa a quel punto. Supponghiamo prima che la proposta curva sia piana.

Conduciamo le tangenti AT, *at*, le quali saranno projezioni della tangente nel punto projettato in A — *a* §. 22, e si trovi il punto T ov' essa incontra il piano I° §. 11.

Assegnato ad arbitrio un punto della curva, del quale siano C — *c* le projezioni, si descrivano le CA, *ca*, le quali saranno projezioni d' un' altra retta giacente nel piano dell' obbiettiva, e sia trovato il punto D dove questa retta incontra anch' essa il detto piano I°.

Tiriamo ora la retta DT e ad essa perpendicolare la AS

indefinita. Si trovi poi la lunghezza della retta finita corrispondente alle projezioni AT—*at*, e si adatti la retta A' T, eguale alla trovata lunghezza, nell' angolo T S A, onde sia determinato il punto A' nella S A prolungata. Ciò fatto, conduciamo per A' una retta A' N' normale alla A'T, e producasi ad incontrare in P la D T. Dal punto P conducendo la retta P*p* normale sulla X Z si determini il punto *p*, indi condotte le rette *p a n*, P A N, dico essere *an* — AN projezioni della normale cercata.

Imperocchè facendo rotare il triangolo PA'T intorno alla PT come asse, il punto A' giugnerà a coincidere col punto projettato in A—*a* §. 15, ed allora il piano del triangolo coinciderà col piano delle due rette projettate, una in AT — *at*, l' altra in AD — *ad*, che è il piano della curva. Ma allora la retta A' T coinciderà colla tangente projettata in AT — *at*, e la retta A' N', che si troverà nel piano della curva, sarà normale alla detta tangente: le projezioni poi della P A' N' saranno allora PAN — *pan*; dunque AN — *an* saranno projezioni della normale nel punto projettato in A — *a*.

Se poi la curva avrà doppia curvatura, convien ricorrere ad altro metodo, del quale daremo ora la dimostrazione, mentre il modo pratico della effettiva costruzione si manifesterà da se nel capitolo seguente.

Concepiscasi un piano normale alla tangente nel punto stesso di contatto A, ed intendiamo descritta su quel piano la projezione M*b* A N della data curva. Sarà il punto stesso A projezione dell' immaginata tangente, e posto che *b* rappresenti la projezione di quel punto mobile che abbiam chiamato B §. 26, sarà nella retta indefinita A*b* la projezione del piano rotante. Accostandosi il punto B al punto A, ancora la sua projezione *b* si accosterà allo stesso punto A, e finalmente coincideranno con questo nel tempo stesso il detto punto B e la sua projezione *b*. Ma allora la retta A*b* diverrà tangente della curva M*b*AN nel punto A §. 22, ed il piano *tangenziale* si troverà projettato nella tangente A K; Fig. 14

sarà dunque determinato questo piano dalla tangente dell' obbiettiva in A e dalla tangente AK della projezione: anzi nella medesima AK sarà la normale che si dimanda.

§. 28. Stabilite queste nozioni sul piano *tangenziale*, si osservi che se due curve, toccandosi in un punto, avranno comune il piano *tangenziale* relativo a quel punto, le normali delle due curve si troveranno per diritto fra loro, formando una sola retta normale alla comune tangente. Ma in altre infinite posizioni potranno toccarsi le due curve e formare colle loro normali un angolo nel punto di contatto §. 24. È dunque da notare la suddetta circostanza, come quella che rende il contatto fra curve di qual si voglia forma veramente completo e simile a quello delle curve costituite in un medesimo piano.

CAPITOLO III.

Della Superficie.

§. 29. Come è determinata una linea quando si può determinare ogni posizione del suo punto generatore §. 7, così sarà determinata una superficie allorchè si possa determinare ogni posizione d'una sua generatrice ed insieme la forma che questa prende in quella posizione medesima.

Dobbiam però osservare primieramente che la generatrice d' una superficie può essere assegnata in parte a nostro arbitrio; e per parlare di una sola fra le molte maniere di cotal determinazione arbitraria, immaginiamo un piano che movendosi paralellamente a se stesso, in ogni sua posizione successiva, tagli la superficie proposta. Nascerà una serie di sezioni, le quali, essendo tutte determinate in una maniera medesima dipendentemente dai dati pei quali è determinata la superficie, hanno perciò una certa relazione fra loro, da cui sono legate in un sistema continuo. Ciascheduna di esse può dunque essere considerata come una generatrice, ed il sistema di tutte insieme costituirà la serie delle forme che

deve successivamente prendere questa generatrice eseguendo il suo movimento.

Poichè il sistema delle accennate sezioni non può esser comune ad altre superficie diverse dalla proposta, se per mezzo delle projezioni esso venga rappresentato graficamente, esprimerà la superficie di cui si tratta, alla quale sola possono appartenere tutte le rappresentate sezioni indefinite di numero.

Nè agli usi or teorici ed ora pratici, ai quali valgono le projezioni, fa mestieri che siano realmente descritte quelle di tutte le sezioni assegnabili nell'indicato modo, o di una serie infinita di esse, operazioni ambedue non possibili ad eseguirsi, ma basterà costruir quelle sole che le circostanze dei problemi renderan necessarie, e da questo discernimento principalmente dipende la risoluzione dei quesiti.

§. 30. Se fingiamo che il piano secante sia paralello ad un de' piani coordinati, e quindi normale agli altri due, le projezioni descritte sul primo saranno eguali, simili, e paralelle alle corrispondenti linee obbiettive, che sono le sezioni già mentovate: le altre projezioni saranno linee rette §.7. Questa maniera di rappresentare la generatrice variabile d'una superficie è conforme a quella che si adopra trattando tali materie coi metodi dell'algebra, ed è generale, applicabile a qualunque superficie, ed in qualunque caso; ma non sempre le sezioni fatte in tal guisa producono la generatrice più semplice. Perciò un secondo oggetto essenziale, cui deve mirare lo studio nostro nel maneggio delle projezioni, è di scoprire la più semplice generatrice, col soccorso della quale si renderan più brevi e facili, ed in conseguenza più esatte le costruzioni, declinando, se giova, dal metodo generale.

§. 31. Secondo questi principj, non sembra, come stimò il Sig. Monge (Geom. descritt. n.° 11), che il metodo già adottato per rappresentare graficamente le linee sia insufficiente a rappresentare le superficie, mentre, passando

da quelle a queste, credo anzi che uniformità più stretta desiderar non si possa nell'artificio di rappresentarle.

Il frutto poi di questi principj medesimi dipende dall' opportunità colla quale saranno applicati ai casi particolari, e ciò non si apprende altrimenti che coll' esercizio. Per la qual cosa occuperemo il presente capitolo con una serie di esempj, i quali nell' atto stesso che serviranno a schiarire quanto fu detto in astratto, prepareranno le nozioni ed i mezzi necessarj per ulteriori applicazioni.

Fig. 15 §. 32. Dati tre punti nello spazio, rappresentare graficamente il piano che passa per essi.

Siano A—*a*, B—*b*, C—*c* le projezioni rispettive dei punti dati. Si trovi §. 11 il punto d'incontro A' della retta condotta pei due punti projettati in A—*a*, B—*b* col piano I°, e parimenti si trovi in C' il punto d'incontro di quella che passa pei due projettati in B—*b*, C—*c*. La retta A' C' sarà l'intersecazione del piano obbiettivo col detto piano I°. Questa retta seghi in D la comune sezione X Z dei due piani I° e II°: sarà D un punto dell' intersecazione fra il piano obbiettivo ed il piano II°. Adunque trovato in *e* il punto dove questo piano è incontrato dalla retta che passa pei due primi punti projettati in A—*a*, B—*b*, la retta indefinita *e* D sarà l' intersecazione del piano obbiettivo col piano II°. Io dico che le due rette DA', D*e* esprimono la posizione del piano che passa pei punti dati.

Imperciocchè essendo D C' A' l' intersecazione di questo piano col piano I°, qualunque sezione sia fatta nel detto piano obbiettivo da un altro piano paralello al piano I°, sarà dessa una retta paralella alla D C' A', e perciò la sua projezione sul piano I° sarà paralella alla stessa D C' A' §. 12. Quella retta poi incontrerà il piano II° in un punto dell' altra retta D*e*. Adunque ogni retta che incontri la D*e* e sia paralella alla DC'A' determina una posizione della generatrice, la quale è per conseguenza una retta che scorrendo lungo la D*e* si conserva sempre paralella alla DC'A'. Similmente

te potrò concludere che un' altra generatrice sarà una retta, la quale scorrendo lungo la DC'A' si conservi paralella alla D*e*. Adunque la descrizione delle due rette DA', D*e* determina ogni posizione d' una retta che genera il proposto piano, e perciò quella descrizione medesima esprime o rappresenta la posizione del detto piano.

§. 33. Cotesta espressione non solamente è atta a far nascere nell' immaginazione l'idea del piano supposto, ma somministra i mezzi di risolvere i quesiti che si possono fare intorno ad esso. E prima supponghiamo data in M una projezione di un punto che giaccia nel piano dato per mezzo delle sue intersecazioni D C' A', D*e* coi piani I° e II°: vuolsi determinare la seconda projezione del punto obbiettivo corrispondente alla data projezione M.

Condurremo per M una retta paralella alla DC', che seghi in M' la comune sezione XZ. A questa condurremo normale per M' una retta che seghi in *m'* la D*e*, indi per *m'* si condurrà la retta *m' m* paralella alla XZ. Finalmente condotta per M una retta normale alla XZ che vada ad incontrare in *m* la *m' m*, si otterrà in *m* la seconda projezione cercata.

Imperciocchè la M M' sarà sul piano I° projezione di una generatrice che passa pel punto corrispondente alla projezione M §. 32. Sarà dunque M' projezione del punto ove questa generatrice incontra il piano II°, e perciò il punto d'incontro si troverà nella M' *m'* §. 11. Ma si deve trovare ancora nella D*e* §. 32; dunque si troverà in *m'*. La generatrice di cui parliamo dev'essere in un piano paralello al piano I°; dunque la sua projezione sul II° sarà nella retta *m' m* paralella alla X Z, ed in questa retta sarà ancora la projezione che si cerca. Ma essa deve pure trovarsi nella retta M *m* §. 10; dunque sarà nell' unico punto *m* che è comune alle due *m m'*, M *m*.

§. 34. Dato un piano per mezzo delle sue intersecazioni coi piani coordinati, trovare gli angoli d'inclinazione che forma con essi.

Fig. 16 Siano Dt, D E le date intersecazioni, e da un punto O nella X Z sia condotta la perpendicolare O M sopra la D E. Prodotte le due date intersecazioni sicchè incontrino rispettivamente in t ed E la retta E O t normale alla X Z, facciasi O M' eguale ad O M, ed uniscasi la t M'. Sarà l' angolo t M' O quello che misura l' inclinazione del piano obbiettivo col piano I°.

Imperciocchè facciamo rotare intorno al cateto O M' il triangolo t O M', elevando il vertice t finchè il piano del triangolo insista perpendicolare al piano I°. Allora il punto t si troverà projettato in O e sarà nel piano obbiettivo. Ora, stando ferma la tO insistente normale al piano I°, facciamo rotare intorno ad essa il triangolo medesimo t O M' finchè il cateto O M' cada sulla retta O M. Il punto M' cadrà sul punto M e perciò sarà nel piano obbiettivo; ma in esso trovasi ancora il punto t, come abbiam veduto; dunque tutta la retta t M' si troverà nel piano obbiettivo e sarà normale tanto al piano obbiettivo quanto al piano I° il piano del triangolo t M' O. Dunque l'angolo t M' O misurerà l'inclinazione scambievole del piano I° coll'obbiettivo. Similmente si dimostrerà che, descritta la O m normale alla D t, e fatta O m' eguale alla O m, se sarà condotta la retta E m', l' angolo E m' O misurerà l' inclinazione col piano II°.

§. 35. Una retta che dal punto O sia condotta normale sul piano dato per le intersecazioni D E, D t avrà sul piano I° la sua projezione nella O M normale alla D E, e sul II° nella O m normale alla D t, dovendo quella normale giacere e in un piano perpendicolare alla D E ed in un altro perpendicolare alla D t.

L'angolo poi d'inclinazione, che la detta normale forma con ciascun piano coordinato, sarà complemento al retto di quello che forma col piano stesso il dato piano obbiettivo. Adunque, presa la normale per seno tutto, il seno della sua inclinazione con un de' piani coordinati sarà coseno dell' inclinazione che ha il piano obbiettivo col piano medesimo.

Perciò se m, n, t siano gli angoli d' inclinazione formati dal piano obbiettivo ordinatamente coi piani I°, II°, III°, avremo la somma dei quadrati descritti dai coseni di questi angoli eguale al quadrato del seno tutto, onde si ha il quadrato del seno di un angolo eguale alla somma dei quadrati descritti dai coseni degli altri due §. 13. Perciò *dati due angoli sarà determinato anche il terzo* .

§. 36. Dato un punto nello spazio per mezzo delle sue projezioni P — p, trovare un piano che passi pel punto dato e formi coi piani coordinati angoli dati d' inclinazione . Fig. 17

Chiameremo m, n, t gli angoli d' inclinazione ordinatamente relativi ai piani I°, II°, III°. Saranno dunque noti i complementi $(90°-m)$, $(90°-n)$, $(90°-t)$, che sono gli angoli formati coi piani stessi da una retta normale al piano cercato §. 35. Si descrivano le projezioni OR — Or di questa retta §. 14, e si conduca pel punto P la PK paralella all' OR e pel punto p la pk paralella all' Or. Condurremo in oltre per P una retta PL normale a PK, che vada ad incontrare in L la XZ. Per L innalzeremo una L l normale alla stessa XZ, che vada ad incontrare in l la $p\,l$ condotta paralella alla XZ. Per l tireremo una retta $l\,g$ perpendicolare alla pk, e sarà $l\,g$ l' intersecazione del piano II° con un piano che soddisfa al quesito. Pel punto g, dove la $l\,g$ incontra la XZ, conducendo poi la g K perpendicolare alla PK, sarà in g K l' intersecazione di quello stesso piano col piano I°.

Imperciocchè l' intersecazione del piano cercato col piano I° deve essere in direzione perpendicolare alla O R o alla P K, e così l' intersecazione col piano II° sarà perpendicolare alla Or, ovvero alla $p\,k$ §. 35. Se dunque un punto del piano cercato ha le sue projezioni in P—p, sarà PL sul piano I° projezione d' una generatrice, e $p\,l$ sarà l' altra projezione sul piano II° §. 32, onde l sarà il punto d' incontro di essa generatrice col piano II°. Adunque la $l\,g$ sarà l' intersecazione del piano cercato col piano II°. Ma l' intersecazione col I° deve passare per g ed essere paralella a P L; dunque

sarà gK . Siccome poi sono quattro le rette che formano gli angoli prescritti $(90° - m)$, $(90° - n)$, $(90° - t)$ §. 14, così quattro sono i piani soddisfacenti al nostro quesito, di ciascheduno dei quali è facile riconoscere la posizione, considerando quella di ciascheduna delle quattro rette mentovate.

Fig. 18 §. 37. Date le intersecazioni Dh, DL d'un piano obbiettivo con due piani coordinati I° e II°: date in oltre le projezioni AB—ab d'una retta indefinita nella sua lunghezza, trovare il suo punto d'incontro col detto piano obbiettivo e l'angolo d'inclinazione che forma con esso.

Producasi la projezione AB finchè seghi in E la DL ed in C la XZ. A questa innalziamo perpendicolare in C la Cc che incontri in c la Dh, prolungata se occorra. Condotta poi per E la Ee normale in e sulla XZ, si descriva la ce e producasi la ab, se è mestieri, finchè seghi in i la stessa ce. Sarà i sul piano II° la projezione del punto cercato, e conducendo per i una normale alla XZ, che vada ad incontrare in I la BC, avremo in I l'altra projezione del medesimo punto.

Imperciocchè se intendiamo projettato nella BC un piano normale al piano I°, sarà in quel piano e la linea data per le projezioni AB—ab, e l'intersecazione del piano stesso col piano dato per le DL, Dh. Quell'intersecazione poi deve incontrare il piano I° in E, ed il II° in c. Adunque la sua projezione sul piano II° sarà la retta ce, e la sua projezione sul I° sarà la retta CE. Ma il punto d'incontro cercato si deve trovare nella detta intersecazione; dunque la projezione di questo punto sul piano II° sarà nella ce e sul piano I° nella CE.

Deve poi trovarsi ancora nella ba la detta projezione sul piano II°, dunque sarà nell'unico punto i che sia comune alle due ab, ce §. 12; quindi l'altra projezione non potrà essere altrove che in I §. 10.

Ora conduciamo per i una retta ir normale alla Dh, e per I una IR normale alla DL. Saranno ri—RI projezio-

ni di una retta normale al piano obbiettivo nel punto corrispondente alle projezioni I—*i* §. 35. Adunque l'angolo che forma quella normale colla retta data corrispondente alle projezioni BI—*bi* è complemento dell'angolo che misura l'inclinazione della retta stessa col piano obbiettivo. Perciò, misurato il primo col metodo già esposto §. 18, si avrà il secondo prendendo la differenza dell'angolo trovato dall'angolo retto.

§. 38. È chiaro che volendo solamente la misura dell'inclinazione che ha la data retta col piano dato, non sarà necessario trovare il punto d'incontro con esso; ma presi nelle projezioni AB, *ab* della retta due punti B, *b* che siano projezioni d'un punto obbiettivo spettante ad essa, basterà condurre per *b* una retta in direzione normale alla D*h*, e per B un'altra in direzione normale alla DL. Le due rette così condotte saranno projezioni di un'obbiettiva che forma colla data un angolo eguale al complemento dell'angolo cercato.

§. 39. Dalla dimostrazione del §. 37 si conosce come, essendo dato un punto per le sue projezioni R—*r*, si troverà la retta che passi per esso e sia normale ad un piano dato per mezzo delle intersecazioni D*h*, DL. Conducendo le rette indefinite RI, *ri*, l'una in direzione normale alla DL, l'altra in direzione normale alla D*h*, saranno RI—*ri* projezioni della retta cercata, ed il suo punto d'incontro col piano dato si troverà col metodo del §. medesimo.

Che se per converso sia data una retta per mezzo delle sue projezioni PK—*pk*, ed assegnato in essa un punto corrispondente alle projezioni P—*p*, siano richieste le intersecazioni di un piano perpendicolare ad essa retta che passi pel punto dato, basterà condurre per P la PL normale alla PK: pel punto d'incontro L colla XZ la normale L*l*, e per *p* la *pl* paralella alla medesima XZ. Finalmente per *l*, ove s'incontrano le due L*l*, *pl*, condotta la *lg* normale alla *pk*, e per *g*, ove *lg* incontra XZ, la *g*K normale alla PK, saranno *lg*, *g*K le intersecazioni dimandate. Fig. 17

§. 40 . Dati due piani per le loro intersecazioni coi piani coordinati, trovare la retta comune ai due dati piani e la scambievole inclinazione loro .

Fig. 19 Siano DL , D*h* le intersecazioni dell' uno ed EM , E*k* quelle dell' altro .

Produrremo le due DL , EM finchè s' incontrino in N , e le due D*h* , E*k* finchè s' incontrino in *p* . Sarà N il punto dove la retta cercata incontra il piano I° e *p* quello dove incontra il piano II° . Adunque condotta per N una normale in *n* sulla XZ e per *p* una normale in P alla stessa XZ, se congiungeremo colla retta NP i due punti N, P e colla *np* i due *n* , *p*, saranno NP—*np* projezioni della retta cercata §. 10 .

Ora conduciamo per P la PR normale alla DN e la PS normale alla EN ; così condurremo per *p* la *pr* normale alla D*p* e la *ps* normale alla E*p* . Dico che l' angolo compreso dalle due rette, una delle quali è projettata in PR—*pr*, l'altra in PS—*ps* , misura l' inclinazione scambievole dei due piani dati .

Imperciocchè la prima delle mentovate rette è normale ad uno dei piani dati , e l' altra è normale all' altro §. 35 . Ambedue s' incontrano in un punto comune ai due piani stessi §. 12 . Adunque l' angolo dell' inclinazione loro scambievole è eguale a quello che formano le due normali , del quale si troverà la grandezza col metodo del §. 18 .

§. 41 . Fra tutte le superficie che possono essere generate da una retta , le più semplici , dopo il piano , sono le superficie coniche e le cilindriche .

Nomino superficie conica quella che si genera da una retta la quale movasi intorno ad un suo punto fermo , scorrendo lungo una data curva qual si voglia , cui distinguo col nome di direttrice perchè regola il movimento della retta . La superficie conica di base circolare o ellittica non è se non un esempio particolare di cotesto genere .

§. 42 . Esprimere graficamente una superficie conica, della quale sia determinato il vertice e la direttrice .

Fingo essere J—*i* le projezioni del vertice, ABCD—*abcd* Fig. 20 quelle della direttrice. Questi soli dati possono bastantemente esprimere la superficie proposta, ma volendo ridurre l'espressione secondo quella maniera che fu accennata nel §. 29 potremo giugnere agevolmente all'intento come segue.

Siano assegnati ad arbitrio nella direttrice quanti punti si voglia, i quali supponghiamo che corrispondano ordinatamente alle projezioni A—*a*, B—*b*, C—*c*, D—*d* ec. Conduciamo le rette JA, JB, JC, JD ec., e le corrispondenti *ia*, *ib*, *ic*, *id* ec. Le due JA—*ia* saranno projezioni della generatrice allorchè passa pel punto projettato in A—*a*: le due JB—*ib* saranno projezioni della generatrice allorchè passa pel punto projettato in B—*b*, e così in seguito.

Adunque i punti, ove la generatrice considerata nelle dette posizioni incontra uno dei piani coordinati, spetteranno all'intersecazione di quel piano colla proposta superficie.

Perciò, trovati i punti d'incontro *A*, *B*, *C*, *D* ec. del piano I° colla generatrice considerata in quante posizioni si voglia §. 11, la linea che passa per tutti quei punti indefiniti di numero sarà l'intersecazione del piano I° colla superficie data.

In modo affatto simile possiam determinare la projezione sul piano I° di qualunque sezion piana fatta paralellamente ad esso.

Sia X'Z', paralella alla XZ, la projezione sul piano II° d'un nuovo piano secante, e saranno i punti 1, 2, 3, ec. projezioni sul piano II° di altrettanti punti che spettano alla sezione. Condurremo dal punto 1 una retta normale alle X'Z', XZ, che vada ad incontrare in I la JB, e sarà I la projezione corrispondente all'altra 1, talchè I—1 saranno projezioni d'un punto della nuova sezione cercata. Condurremo similmente per 2 una normale alle X'Z', XZ che vada ad incontrare in II la JC e saranno II—2 projezioni di un punto che al pari del precedente spetta alla predetta sezione. Proseguendo dunque nello stesso modo si determinerà

un numero qual si voglia di punti A , I , II , ec. pei quali tutti deve passare la curva in cui esser deve projettata la nuova sezione .

§. 43. Ma, o sian date le projezioni della direttrice, o l'intersecazione con uno dei piani coordinati, come la *ABCD* ec., che è l' intersecazione col piano I°, uno di questi dati, congiunto alle projezioni del vertice , basterà a poter determinare ogni punto della proposta superficie allorchè sia data una projezione di esso .

Ponghiamo in E questa projezione. Condurrò per E una retta J E che incontri o la projezione della direttrice in E', o l'intersecazione *ABCD* in $\mathcal{E}$. Se dovrò servirmi della direttrice, innalzerò per E' una normale alla X Z che vada ad incontrare in *e'* la curva *abcd* ec. , la quale è projezione della stessa direttrice sul piano II°. Se poi sarà data l' intersecazione, condurrò per $\mathcal{E}$ una normale sulla X Z in ε . Descritta una retta che passi per *i* e per l' uno dei due punti *e'*, ε, in essa dovrà essere anche l' altro, ed inoltre la cercata projezione corrispondente alla data E . Conducendo dunque pel punto E una retta normale alla X Z che vada ad incontrare in *e* la retta εi, in questo punto d' incontro *e* sarà determinata la seconda projezione richiesta, onde le due projezioni E—*e* determineranno un punto della data superficie .

Se la medesima retta incontrerà in più d' un punto o la curva ABCD , se questa è la data projezione della direttrice, o l'altra curva *ABCD*, se questa sarà data invece della precedente , quanti saranno i punti d' incontro , altrettante rette saranno determinate nel modo stesso con cui fu determinata la $i\varepsilon$, onde altrettante projezioni saranno pure determinate come la *e* , ciascheduna delle quali combinata colla medesima E determinerà un punto distinto della superficie proposta .

§. 44. Fingiamo che il vertice della superficie conica si scosti dalla direttrice ad una distanza infinita , la detta superficie passerà alla forma cilindrica. Ciò vuol dire che se

la

la generatrice della prima si deve rivogliere intorno ad un dato punto fermo, quella della seconda progredirà sempre paralella a se medesima, scorrendo lungo la direttrice. Fatta questa distinzione, quel che si è detto intorno alla maniera di esprimere la superficie conica, conviene parimenti ancora alla cilindrica.

Sia dunque ABC ec. l' intersecazione del piano I° con una superficie cilindrica. AD — *ad* siano projezioni della generatrice allorchè passa pel punto A; si vuol determinare graficamente il punto, o i punti della data superficie i quali corrispondano ad una projezione M data sul piano I°. Fig. 21

Conduciamo per M la retta MN paralella alla AB che incontri in N la curva ABC. Per N conduciamo una normale alla XZ che la incontri in *n*, e da questo punto sia tirata una retta *nm* paralella alla *ad*. Sulla *nm* sarà la seconda projezione corrispondente alla data M e si determinerà nel solito modo. Quì pure se la MN incontri in più d'un punto la curva ABC avran luogo le conclusioni fatte superiormente §. 43.

§. 45. Osserviamo un'altra maniera di superficie generate da una retta linea. Le condizioni della generatrice sono che nel suo movimento progressivo debba sempre incontrare tre altre linee date come direttrici.

Supponghiamo prima in generale che siano queste tre curve, e le chiameremo D, D', D''.

S' immagini costituito in un punto della D il vertice d' una superficie conica, della quale sia direttrice la D'. Se questa superficie incontri la curva D'' in un punto, la retta condotta per cotal punto e pel vertice segherà tutte le tre curve D, D', D'', e perciò determinerà una posizione della generatrice. Quante saranno le intersecazioni della superficie conica e della curva D'', tante posizioni della generatrice determineremo nello stesso modo. Convien dunque vedere come si trovino queste posizioni dipendenti dalle intersecazioni predette.

Fingiamo descritta una nuova superficie conica la qual abbia il medesimo vertice della precedente, ma la sua direttrice sia la curva D''. Se la prima superficie conica ha comune un punto colla curva D'', per quel punto passerà una retta comune ad ambedue le superficie coniche. Supponendo dunque che queste siano tagliate o da un dei piani coordinati, o da qualunque altro, le due intersecazioni avran comune quel punto ove l'accennata retta incontra quel piano, e reciprocamente quanti saranno i punti comuni alle due intersecazioni, altrettante saranno le rette comuni alle due superficie coniche, le quali rette segheranno le tre direttrici, e perciò corrisponderanno ad altrettante posizioni della generatrice.

Dunque per ogni punto della D, relativamente al quale si voglia determinare la generatrice, o le generatrici corrispondenti, converrà descrivere le intersecazioni di uno fra i piani coordinati qual si voglia, o di qual altro piano torni più comodo, e delle due superficie coniche le quali abbiano il vertice comune in quel punto, ma diverse le direttrici, cioè l'una abbia la D' e l'altra la D''. Le intersecazioni delle due curve che nascono sul piano secante determineranno, secondo ciò che abbiam detto, tutte le rette generatrici che passano pel punto preso come vertice.

§. 46. Simplifichiamo alquanto cotesto soggetto supponendo che le direttrici siano tre rette linee, le quali a due a due non possano giacere in un piano.

In questo caso non più dovremo considerare una superficie conica, ma un piano che sia determinato da una delle tre direttrici, ponghiamo la D', e da un punto variabile su qual si voglia delle altre due, a cagion d' esempio sulla D. Il piano che passa per la D' cangerà sempre posizione dipendentemente dal punto della D per cui deve passare; ma in qualunque posizione segando la terza direttrice D'' in un punto, questo e quello che si assume nella D determineranno una posizione della generatrice. Tutte queste

posizioni sono dunque determinate dalle intersecazioni di un piano, rotante intorno alla D', colle altre due direttrici D, D''.

Siano AB—*ab* le projezioni di quella che abbiamo denominato D, CP—*cp* spettino alla seconda detta D', e le EF—*ef* sian quelle della terza D''. Facciamo che il piano rotante passi per la D' e nominiamla asse. Benchè la superficie sia determinata per le projezioni delle tre direttrici, ciò nulla ostante non possiam dire che questa maniera di rappresentazione basti per determinare immediatamente qualunque punto della superficie, tosto che di esso abbiasi una sola projezione, ma se vogliamo adoperare i dati quali sono nella Fig. 22 converrà prima determinare una sezione piana che passi pel punto corrispondente alla data projezione, onde poterlo compiutamente determinare col soccorso di essa. Fig. 22

Sia Q la data projezione, e P il punto ove il piano I° è incontrato dall' asse. Descritte ad arbitrio quante rette si voglia nel piano I° che passino tutte pel punto P, come la PL, ciascheduna di esse rappresenterà l' intersecazione del piano I° col piano rotante considerato in una particolar posizione.

Il punto ove questo piano incontra la direttrice D sarà in quella retta ove si tagliano lo stesso piano rotante ed un altro condotto normale al piano I° per la AB. Similmente il punto dove il piano rotante considerato nella medesima posizione incontra la D'', sarà nell' intersecazione del detto piano con quello che si condurrà per la EF normale al piano I°. Ciò posto prenderemo a determinare queste sezioni.

Siano C—*c* projezioni d' un punto assegnato ad arbitrio nell' asse e per C conduciamo la MM' paralella alla PL, producendola a segare in M la AB e in M' la EF. Per *c* conduciamo una retta *c m m'* paralella alla XZ, e saranno MM'— *m m'* projezioni d' una retta che giace nel piano rotante ed è paralella alla PL §. 12. Pel punto L, dove la PL incontra la AB, sia condotta una normale alla XZ in *l* e pel

punto M una normale in m alla $m\,m'$. La retta che supporremo condotta per m ed l sarà manifestamente projezione di quella in cui si tagliano il piano rotante e l' altro eretto normale al piano I° per la A B §. 40. Adunque sul piano II° la projezione del punto d' incontro fra la direttrice D ed il piano rotante dev' essere e nella retta $m\,l$ e nell' altra $a\,b$, e perciò sarà determinata nella loro intersecazione n. Similmente per L', dove P L sega E F, conducendo una normale in l' sulla XZ, ed un' altra normale dal punto M' sulla $m\,m'$ in m', descritta la $m'\,l'$, si concluderà esser questa sul piano II° la projezione della retta ove si tagliano il piano rotante e quello che passa per la E F normale al piano I°. Dunque sarà nella retta condotta per m' ed l' la projezione del punto d' incontro fra 'l piano rotante e l' altra direttrice D'', e quindi in n', dove si tagliano la $m'\,l'$ e la $e\,f$, sarà la projezione del detto punto d' incontro. Perciò la retta $n\,n'$ sarà projezione della generatrice corrispondente alla considerata posizione del piano rotante. Condotte poscia per n ed n' due normali alla X Z che vadano ad incontrare, una in N la A B, ed una in N' la E F, si avrà l'altra projezione N N' della medesima generatrice.

Similmente potremo determinare quante altre posizioni si voglia della generatrice per mezzo delle projezioni corrispondenti.

Ora conduciamo pel dato punto Q una retta Q R parallella alla X Z e si rappresenti in essa la projezione di un piano parallello al piano II°. Potremo determinare il punto ove il piano projettato sulla Q R è incontrato dalla generatrice corrispondente alle projezioni N N' — $n\,n'$, e l' operazione è semplificata in questo caso particolare dalle circostanze del piano di cui si tratta. Imperciocchè se in N'' si taglino le due rette QR, NN', innalzata per N'' una normale alla XZ che vada a segare in n'' la $n\,n'$, saranno N''—n'' le projezioni del punto cercato, il quale è manifesto che spetterà all' intersecazione della nostra superficie col piano projettato in Q R. Nel

modo stesso possiamo determinare quanti altri punti sarà mestieri di cotesta intersecazione, e la linea che passa per tali punti sarà l'intersecazione medesima. Se dunque supponghiamo descritta sul piano II° la sua projezione, che passerà per tutti i punti determinati come il punto n'', e dal punto dato Q s'innalzi una normale alla X Z che vada a tagliare la detta projezione, sarà così determinata la seconda projezione corrispondente alla prima già data in Q, e con ciò sarà compiuta la determinazione del punto cercato.

§. 47. Ma si agevola in gran parte la costruzione precedente se quella direttrice che assumiamo per asse trovisi normale ad un de' piani coordinati. Rappresentiamo questo caso nella Fig. 23, ove l'asse è supposto perpendicolare al piano I°, essendo nel punto P la sua projezione sopra di esso, e nella retta *p c* la corrispondente projezione sul piano II.° AB—*ab*, EF—*ef* sono come nella Fig. 22 le projezioni delle due direttrici rimanenti. Il piano rotante intorno all'asse, e la generatrice ch'esso determina in ogni sua particolar posizione, saranno sempre projettati sul piano I° in una retta che passa per P, come per esempio la PL. L'intersecazione di questa retta colla AB in L determina la projezione del punto ove si tagliano scabievolmente la generatrice projettata in PL e la direttrice D, che è quella projettata in AB—*ab*. Similmente l'altra intersecazione L' fra la stessa LP e la EF determinerà il punto dove si tagliano la predetta generatrice e la direttrice D'' projettata in EF—*ef*. Adunque, elevate per L ed L' due normali alla X Z, delle quali la prima vada ad incontrare in *l* la *a b*, e l'altra in *l'* la *e f*, sarà determinata la retta *ll'*, che sul piano II° è projezione della medesima generatrice la quale sul piano I° è projettata in L L'. Fig. 23

Pertanto se il punto Q sia dato come projezione di un punto che spetti alla superficie proposta, si troverà immediatamente la seconda projezione conducendo per Q e P la retta indefinita PM'QM che seghi in M la AB ed in M' la

EF, e per mezzo dei punti M, M', determinando i due corrispondenti m, m', come or ora furono determinati i due l, l' per mezzo dei due L, L', si troverà similmente la retta mm' che sul piano II° è projezione della generatrice, la quale sul piano I° ha la sua projezione in MM'. In questa generatrice dovendo essere il punto cercato che ha sul piano I° la sua projezione in Q, non rimane che a determinare l' altra sua projezione q sul piano II°, la quale trovasi conducendo per Q una retta perpendicolare alla XZ che vada a segare la mm', e sarà q il punto di questa intersecazione.

§. 48. Sono di grandissimo uso nelle arti quelle superficie che vengono generate da una linea obbligata a descrivere con tutti i suoi punti altrettante paralelle ad una linea data come direttrice.

Con questa condizione si vuol significare che se un piano incontri ad angoli retti una delle dette linee paralelle, incontrerà pure ad angoli retti tutte le altre; ed in oltre se due piani seghino perpendicolarmente due di queste linee, la retta che unisce le due intersecazioni fatte dal primo eguaglia sempre quella che unisce le due intersecazioni fatte dal secondo.

Segue da ciò che, descritto il poligono rettilineo che viene determinato dai punti ove un piano sega perpendicolarmente quante si voglia delle accennate linee paralelle alla data direttrice, esso poligono avrà una certa figura determinata e costante in tutte le posizioni nelle quali si può considerare il piano secante.

Ora si osservi che il poligono è circoscritto dalla sezione che il medesimo piano fa nella superficie curva descritta dalla supposta generatrice; e perchè i lati di esso possono essere di un numero quanto si voglia grande, ed in conseguenza la lunghezza di ciascheduno minore di qualunque assegnabile, la sezion curva sarà limite dei poligoni che si possono descrivere in tal maniera approssimandoli sempre più ad essa col moltiplicare i loro lati. Se dunque in tutte le

posizioni del piano secante ciascuno dei poligoni, determinati come fu detto, conserva la sua forma costante, converrà che conservi pure una forma costante ancora la sezion curvilinea. Perciò tutte le sezioni fatte nella superficie di questo genere con piani normali o alla direttrice o ad una delle altre linee paralelle ad essa, sono eguali e simili fra loro.

§. 49. Da queste nozioni deriva immediatamente il metodo di descrivere la figura che deve avere ogn' una delle dette sezioni.

Si rappresenti in P un punto nel quale un piano secante debba segare la direttrice che suppongo rappresentata dalle projezioni ABC—*abc*. La retta TT' sia quella che deve coincidere colla normale della direttrice allorchè il piano suddetto sarà posto in modo che la seghi nel punto accennato, e siano EDG—*edg* projezioni della generatrice. Fig. 24

Secondo la definizione è chiaro che se da un punto della generatrice, per cagion d' esempio da quello che è projettato in D—*d*, sia condotta una retta perpendicolare alla direttrice che si rappresenti dalle projezioni BD—*bd*, in qualunque altra delle successive sue posizioni si consideri la generatrice, la retta che dal medesimo punto sarà condotta perpendicolare alla direttrice conserverà la lunghezza che aveva prima, cioè quella che è determinata dalle projezioni BD—*bd*.

Immaginiamo ora che la normale della direttrice nel punto projettato in B—*b* si rappresenti per le projezioni BF—*bf*, e che F—*f* siano projezioni d' un punto nel quale essa normale prolungata incontra la supposta superficie. È pur chiaro per la definizione che la distanza del punto projettato in D—*d* da quella linea paralella alla direttrice che giace nella considerata superficie e passa pel punto projettato in F—*f*, sarà sempre la medesima in tutte le posizioni nelle quali si trasferisce il punto corrispondente alle projezioni D—*d*. Adunque ancora l' angolo che la retta projettata in BD—*bd*, trasferendosi nelle successive sue posizio-

ni, forma colla corrispondente normale della direttrice si conserverà costante, cioè sempre eguale a quello che è dimostrato dalle projezioni DBF—*dbf*.

Per la qual cosa fingasi che PT' rappresenti il ramo della normale procedente dalla parte convessa della direttrice e PT rappresenti quello che è dalla parte concava; si applicherà in P l' angolo T'PΔ eguale a quello che corrisponde alle projezioni DBF—*dbf*, e fatta PΔ eguale alla retta projettata in BD—*bd*, sarà determinato in Δ il luogo ove accade l' intersecazione fra il supposto piano normale e la curva descritta dal punto projettato in D—*d*.

Similmente operando potremo determinare quanti altri punti si voglia Δ', Δ'', ec., tutti spettanti all' intersecazione richiesta, la quale verrà in questo modo determinata.

Fig. 24 §. 50. Dalle cose dette si vede facilmente come si possa costruire una projezione della curva la quale sia descritta da qualunque punto della generatrice paralellamente alla direttrice.

Sia, come prima, il punto projettato in D—*d*, e supponghiamo trovato tanto l' angolo T'PΔ, quanto la lunghezza PΔ §. §. 18, 11.

Assegnato ad arbitrio nella direttrice un punto per le projezioni H—*h*, sia condotta per esso la normale della direttrice e siano HI—*hi* le sue projezioni §. 27. Si potrà condurre per quel medesimo punto un' altra retta in un piano perpendicolare alla direttrice, e che sia posta rispetto alla detta normale come è posta la retta projettata in BD—*bd* relativamente alla normale projettata in BF—*bf*, talchè procedendo queste due rette ultimamente nominate dalla parte convessa della direttrice, ed essendo la seconda al di sotto della prima, dalla parte convessa procedano pure le due precedentemente indicate, e di esse quella normale alla direttrice sia pur al di sotto dell' altra, ed inoltre l' angolo formato dalle due prime eguagli quello delle due seconde.

Poichè dunque conosciamo l' angolo T'PΔ, e la lunghez-

za

za PΔ, ed inoltre è determinato il piano normale alla direttrice nel punto corrispondente alle projezioni H—h §. 36, otterremo le due projezioni HD'—hd' di quella retta che si deve applicare al punto projettato in H—h §. 15, e gli estremi D'—d' saran projezioni di un punto che spetta alla curva generata dal supposto punto corrispondente alle projezioni D—d.

Potendosi dunque determinare altri punti quanti si voglia della medesima curva, tutti nello stesso modo con cui fu determinato il precedente, nulla più fa di bisogno per ottenere le projezioni di essa §. 7.

§. 51. Quello che fu detto di una conviene manifestamente a tutte le curve che si descrivono dai punti della generatrice. Possiam dunque fingere che sian costruite le projezioni d' un numero indefinito di queste curve.

Un piano che le seghi tutte determinerà ne' suoi punti d' intersecazione con esse altrettanti punti che spettano alla sua intersecazione con la superficie di cui si parla.

Se dunque in un de' piani coordinati sia dato un punto come projezione di un altro che giaccia nella detta superficie, la posizione di quel punto si potrà determinare come nei precedenti §§. 44, 47, per mezzo della sezione fatta nella superficie obbiettiva da un piano che sia condotto per la data projezione, e normale al piano coordinato sul quale è data. Le projezioni delle curve, che abbiam supposto essere descritte sui piani coordinati, sono dunque mezzi necessarii per determinare, in generale, la detta sezione, ed in conseguenza per risolvere il problema.

§. 52. Ma nelle costruzioni insegnate dai §§. 49, 50, noi supponghiamo descritta la perpendicolare che da un punto qual si voglia della generatrice si conduce sulla direttrice. Come possa essere eseguita questa operazione in qualunque caso si mostrerà nel Cap. VII. Frattanto per proseguire l' esercizio nostro gradatamente esamineremo alcuni di quei

casi, ove non è d' uopo d' altre nozioni fuorchè di quelle già esposte fino ad ora.

§. 53. Le superficie dette di rotazione costituiscono una classe soggetta alla medesima definizione del §. 48. Qualunque sia la loro generatrice, essa è obbligata a descrivere co' suoi punti altrettante circonferenze circolari, delle quali è comune asse una retta data, cioè a dire i centri di tutti quei circoli sono nella retta medesima, ed i loro piani ad essa normali. È dunque manifesto che un piano perpendicolare ad una, e per conseguenza a tutte le altre circonferenze, passa per l' asse, giacchè deve passare per tutti i centri.

Fig. 25 Siano PP' — *pp'* projezioni dell' asse, ABC — *abc* projezioni della generatrice, e si voglia descrivere la figura della sezione fatta da un piano condotto per l' asse.

Per un punto P', preso ad arbitrio nella retta PP', sia tirata una perpendicolare alla XZ, producendola a segare in *p'* la *pp'*. Pongasi poi una retta ΠΠ' eguale alla PP' e s' innalzi per Π' una normale Π'π, facendola eguale a quella che misura la distanza del punto *p'* dalla XZ. Descritta la Ππ, sarà dessa eguale alla porzione finita dell' asse che corrisponde alle projezioni *pp'* — PP' §. 11.

Assegniamo ora nella generatrice un punto per mezzo delle sue projezioni D — *d*, e da questo sia condotta all' asse una normale, di cui siano projezioni le DK — *dk* §. 15. È chiaro che questa normale sarà semidiametro della circonferenza che deve descrivere il punto projettato in D — *d* attorno all' asse, e che il centro di essa sarà nel punto dell' asse projettato in K — *k*.

Pongasi dunque Πγ eguale a PK e s' innalzi la normale γγ che seghi in γ la Ππ. Sarà Πγ eguale alla porzione dell' asse projettata in PK — *pk* §. 11. Dunque γ rappresenterà il punto dell'asse projettato in K — *k*; e se per γ sia condotta la retta γδ normale alla Ππ ed eguale a quella che è projettata in DK — *dk*, il punto δ rappresenterà quel punto del piano se-

cante ov' esso incontra la circonferenza che si descrive dal punto della generatrice projettato in D—d.

Ometto la dimostrazione perchè evidente, e passo a concludere che per altri punti della generatrice quanti si voglia, determinati dalle corrispondenti loro projezioni D'—d', D''—d'' ec. si potrà rinovare la costruzione ed il ragionamento fatto sul punto che corrisponde alle projezioni D—d, e nella stessa maniera determineremo quanti altri punti si voglia δ', δ'' ec. spettanti alla linea di cui si cerca la figura. Perciò essa verrà determinata dai detti punti δ, δ', δ'', e quanti altri si crederà necessario descrivere nell' accennata maniera.

Lunga sarebbe l' operazione volendo determinare col metodo del §. 15, tutte le rette che dai punti assegnati nella generatrice intendiamo condotte perpendicolari all' asse, come quella indicata dalle projezioni DK—dk. Ma la natura del problema ammette un espediente, per cui non poco sono agevolate le costruzioni.

Fingiamo condotte dai punti D, D', D'', ec. altrettante normali sulla PP', e misurate le loro distanze dal punto P, facciansi ordinatamente eguali a queste distanze le rette ΠC, ΠC', ΠC'' ec. Dai punti C, C', C'' ec. eleviamo altrettante normali alla $\Pi\Pi'$, cioè le Cc, C'c', C''c'', facendole ordinatamente eguali alle distanze dei punti d, d', d'', ec. dalla XZ. Ciò fatto condurremo le rette $c\gamma$, $c'\gamma'$, $c''\gamma''$ ec. perpendicolari sulla $\Pi\pi$ ed i punti γ, γ', γ'' ec. determineranno sulla retta $\Pi\pi$, che rappresenta l' asse, i centri dei circoli che si descrivono rispettivamente dai punti della generatrice projettati in D—d, D'—d', D''—d'' ec.

Per trovare le lunghezze dei loro semidiametri opereremo nel modo che ora sarà indicato relativamente ad uno di essi, e questo sia il primo.

Presa una retta eguale alla distanza del punto D dalla PP', sopra di essa come cateto si faccia un triangolo rettangolo, di cui l' altro cateto sia $c\gamma$, e l' ipotenusa di questo triangolo eguaglierà il cercato semidiametro, che è quello

del circolo descritto dal punto corrispondente alle projezioni D—d. Posta dunque $\gamma\delta$ eguale alla lunghezza della trovata ipotenusa, sarà δ un punto dell'intersecazione che si vuol descrivere, cioè di quella che nasce segando la superficie di rotazione con un piano condotto per l'asse. Perciò, trovate insimil modo le lunghezze degli altri semidiametri, ed applicate ordinatamente ai prolungamenti delle rette $c'\gamma'$, $c''\gamma''$ec., si otterranno i punti, δ' δ'' ec. pei quali è determinata la sezione.

Imperciocchè immaginiamo che per la retta P P′ passi un piano perpendicolare al piano I°, e nominiamolo Y per brevità di discorso. Dal punto della generatrice che è projettato in D—d fingiamo condotto un piano perpendicolare all' asse, e nominiamo V questo piano. In esso sarà il circolo che si descrive dal punto projettato in D—d; e se di questo punto descrivasi la projezione sul piano Y, per essa projezione passerà la retta in cui si tagliano scambievolmente i due piani Y, V. Quella retta sarà manifestamente perpendicolare all' asse che, per ipotesi, giace nel piano Y; nella retta medesima giace poi la projezione di tutto il circolo sul piano Y, e per conseguenza ancora la projezione di quel semidiametro che termina nel punto dato per le projezioni D—d. Adunque l' intersecazione di questa retta coll' asse determina il centro del circolo.

Perchè poi il semidiametro considerato ha un estremo nell' asse e l'altro estremo tanto distante dal piano Y quanto il punto D è distante dalla retta P P′, ne segue che deve eguagliare l' ipotenusa d' un triangolo rettangolo del quale un cateto eguagli la detta distanza, e l'altro cateto eguagli la projezione del semidiametro stesso sul piano Y. §. 11.

Raffrontiamo ora le parti di questo ragionamento colla costruzione già eseguita.

Se il piano Y sia rappresentato da quello del triangolo $\Pi\,\pi\,\Pi'$, e la retta $\Pi\,\Pi'$ rappresenti la P P′, è chiaro che la retta $\Pi\,\pi$ rappresenterà l' asse costituito nel piano Y. Perchè poi la Π C eguaglia la distanza che è tra 'l punto P e

la perpendicolare che fingiamo condotta dal punto D sulla P P', ed inoltre la C c eguaglia la distanza del punto d dalla X Z, sarà rappresentata in c la projezione sul piano Y di quel punto medesimo il quale, sui piani I° e II°, è projettato in D—d. Adunque $c\gamma$ rappresenta la projezione del semidiametro di quel circolo che si descrive dal detto punto, e γ rappresenta il centro del circolo medesimo, il quale è projettato anch'esso nella retta $c\gamma$, considerata come indefinita.

Un punto dove la circonferenza incontri il piano Y sarà dunque nella retta $c\gamma$, e distante da γ quant'è la lunghezza del semidiametro. Ma la $\gamma\,\delta$ fu posta eguale a tal lunghezza; dunque δ è il detto punto; è perciò spetta all' intersecazione cercata del piano Y colla superficie di rotazione. Nello stesso modo proveremo che i punti δ', δ'' ec. spettano alla medesima intersecazione; dunque la sua figura è determinata dalla linea che passa per que' punti. Ma qualunque altro piano che passi per l' asse, essendo normale a tutte le circonferenze, produrrà una sezione eguale e simile a quella del piano Y §.48; dunque la figura determinata è, in generale, quella che si produce per la sezione d' un piano condotto per l' asse.

Nella curva $\delta\,\delta'\,\delta''$ ec. si rappresenta un ramo solo della sezione, la quale ha un altro ramo eguale, simile, e similmente posto dall' altra parte dell' asse. Facile è il modo di descriverlo, volendo; perciocchè basta produrre dalla parte opposta dell'asse le applicate $\delta\gamma$, $\delta'\gamma'$, $\delta''\gamma''$ ec., e ad esse eguagliare ordinatamente i loro prolungamenti. Gli estremi di questi determineranno altrettanti punti omologhi ai precedenti δ, δ', δ'' ec., onde verrà similmente determinato l'altro ramo della sezione.

§. 54. Si vede tosto quant' è agevole descrivere le projezioni degli accennati circoli, riflettendo che queste projezioni sopra un piano coordinato sono altrettante ellissi fra loro simili, perchè egualmente inclinati ad esso piano coordinato sono tutti i piani dei circoli obbiettivi. I centri delle ellissi

sono projezioni dei centri de' circoli: gli assi maggiori delle medesime saranno eguali ai diametri dei circoli corrispondenti, e posti normali alla projezione dell' asse della superficie: i minori poi saranno tutti nella detta projezione, ed avranno ai maggiori una data ragione dipendente dall' inclinazione che ha l' asse della superficie rispetto al piano sul quale vorremo descrivere le dette projezioni. Per maggiore chiarezza indicheremo la costruzione di una di coteste ellissi, e ciò che si dirà sopra quella s' intenderà detto sopra qualunque altra.

Vogliasi dunque costruire sul piano I° l' ellisse che è projezione del circolo descritto dal punto della generatrice dato per le projezioni D—d. Il centro dell' ellisse dimandata sarà in K, e per K condotta la retta R K R' perpendicolare alla P P', in essa R R' sarà l' asse maggiore. Ma questo dovendo essere eguale al diametro del circolo obbiettivo, si porrà ciascheduna delle due parti K R, KR' eguale alla retta $\gamma\delta$, e sarà determinato l'asse maggiore nella retta finita R R'. Quanto al minore è chiaro che dev' essere eguale alla projezione di quel diametro del circolo che si troverà nel piano eretto perpendicolare al piano I° per la retta P P'. L' inclinazione di quel diametro rispetto al piano I° è misurata dall' angolo $\Pi\gamma\Gamma$, o pure da quello che forma in γ la $\delta\gamma$ con una retta che per γ si conduca paralella alla $\Pi\Pi'$.

Ciò posto, se per δ si cali perpendicolare alla $\Pi\Pi'$ la $\delta\varphi$, avremo in $\Gamma\varphi$ la projezione del semidiametro $\gamma\delta$; e perciò, fatta eguale alla $\Gamma\varphi$ tanto la K S, quanto la K S', sarà S S' il cercato asse minore, onde l' ellisse che si descriverà intorno ai dati assi R R', S S', sarà la projezione del circolo proposto.

§. 55. Qualunque piano perpendicolare al piano I° taglierà il circolo ora considerato, avrà ancora per sua projezione sullo stesso piano I° una retta che segherà l' ellisse corrispondente, ed i punti d' intersecazione fra la retta e l' ellisse saranno projezioni di altrettanti punti, ne' quali il circolo sega il piano accennato, §. 51. Avendo poi descritta la

projezione del medesimo circolo sopra il piano II°, compiremo col mezzo di questa la determinazione degl' indicati punti d' incontro fra 'l piano e la circonferenza del circolo nel solito modo spiegato dal §. 8 .

Lo stesso ragionamento si ripeterà sopra un piano perpendicolare a qualunque altro dei due rimanenti piani coordinati, allorchè seghi la circonferenza del circolo predetto. È dunque chiaro che per questa via possono essere determinati quanti punti si voglia della sezione fatta nella superficie da un piano paralello ad uno dei tre coordinati . La superficie è dunque sufficientemente espressa per le projezioni del suo asse, e della generatrice, giacchè da questi dati possiam dedurre tutto ciò che si richiede nel §. 29 .

§. 56 . Coi mezzi precedentemente esposti si giugne ancora a determinare qualunque punto della superficie, del quale sia data una sola projezione , applicando ciò che abbiam detto nel §. 51 . Ma la natura della superficie, intorno alla quale versiamo ora, ammette qualche agevolezza da non trascurare , e questa si ottiene profittando del comodo che somministra la curva circolare, la quale può essere considerata come una generatrice .

Ponghiamo in M la data projezione di un punto che è nella superficie data , e si voglia trovare l' altra projezione del punto medesimo sul piano II°. È chiaro che il quesito sarà soddisfatto quando si trovi la distanza che ha il punto richiesto dalla sua projezione M .

Sia condotta per M una retta normale alla P P' nel punto L, e posta la γt eguale alla ML, descrivasi per t una retta indefinita $t\,o''$ paralella alla $\Pi\,\pi$. Ora col centro γ e coll' intervallo $\gamma\,\delta$ si descriva un circolo che seghi in o la retta $t\,o''$: col centro γ' e coll' intervallo $\gamma'\,\delta'$ descrivasi un altro circolo che seghi in o' la retta medesima : col centro γ'' e coll' intervallo $\gamma''\,\delta''$ descrivasi un terzo circolo che seghi in o'' quella medesima retta, e così di mano in mano . Siano t, t', t'' ec. i punti ove la retta $t\,o''$ taglia rispettivamente le

$\delta\gamma$, $\delta''\gamma'$, $\delta''\gamma''$ ec., e si faccia $\gamma\omega$ eguale alla $t\,o$, $\gamma'\omega'$ eguale alla $t'\,o'$, $\gamma''\omega''$ eguale alla $t''o''$ ec. Tutti i punti ω, ω', ω''' ec. apparterranno alla figura della sezione che si fa nella superficie con un piano elevato normale al piano I°, che passi per M e sia paralello all'asse della superficie medesima. Cotesta sezione avrà due rami eguali e simili, posti similmente dall' una e dall' altra parte dell'asse, uno dei quali è determinato dai detti punti ω, ω', ω'' ec., l' altro si determinerà in modo analogo, quando sulle rette $\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$, $\gamma''\delta''$ si pongano ordinatamente le misure $\gamma\omega$, $\gamma'\omega'$, $\gamma''\omega''$ ec.

Prendiamo ora la $\Pi\lambda$ eguale alla PL e per λ si elevi una normale alla $\Pi\Pi'$, producendola fin che vada ad incontrare in qualche punto ω''' la curva determinata dai punti ω, ω', ω'' ec. La perpendicolare $\lambda\omega'''$ eguaglierà manifestamente l'applicata relativa al piano I°, la quale congiunge la data projezione M con un punto della superficie da essa rappresentato; anzi se la perpendicolare $\lambda\omega'''$, prodotta quanto è mestieri, incontrerà ancora in ω'^{v} la stessa curva $\omega\,\omega'\,\omega''$ ec., avremo la retta $\lambda\,\omega'^{v}$ eguale ad un' altra applicata la quale congiunge un secondo punto della superficie colla sua projezione in M; ed in generale, quanti saranno i punti ove la normale $\lambda\,\omega'''$ incontra la curva $\omega\,\omega'\,\omega''$ ec., altrettanti punti della superficie avran comune sul piano I° la projezione M, e di ciascheduno verrà determinata l' applicata corrispondente che deve riferirsi al piano I°; onde le loro projezioni sul piano II° saranno pure determinate.

La dimostrazione relativa a ciascheduna parte della costruzione indicata si lascia trovare al Lettore per suo utile e non difficile esercizio.

§. 57. Ma quando l' asse della superficie di rotazione sarà perpendicolare ad uno dei piani coordinati, è manifesto che in quel piano le projezioni dei circoli descritti da' punti della generatrice sono altrettanti circoli concentrici eguali ai corrispondenti loro obbiettivi. Le projezioni poi sugli altri due piani saranno rette linee.

Nel-

Nella Fig. 26 si rappresenta questo caso, essendo l'asse perpendicolare al piano I°, e perciò projettato nel punto P sopra quel piano e nella retta pp' sopra al piano II°. Fig. 26

Condotte da quanti punti si voglia D, D', D'' ec. della curva, che è projezione della generatrice sul piano I°, altrettante rette DP, D'P, D''P ec., e dai corrispondenti punti d, d' ec. nella projezione della generatrice sul piano II°, altrettante rette dk, $d'k'$ ec. normali alla pp', saranno DP — dk projezioni del raggio d'un circolo, D'P — $d'k'$ projezioni del raggio d'un altro circolo, e così in seguito. Perciò il primo circolo avrà per sua projezione sul piano I° quello stesso che si può descrivere col centro P e coll'intervallo DP, il secondo avrà per sua projezione quello che si può descrivere col medesimo centro P e coll'intervallo D'P ec. Sul piano II° poi il primo circolo avrà la sua projezione nella retta $d\delta$, della quale la parte $k\delta$ eguaglia la D P; il secondo avrà similmente la sua projezione nella retta $d'\delta'$ di cui la parte $k'\delta'$ eguaglia la D' P, e così di mano in mano. Descritte dunque quante rette si voglia nel modo stesso col quale furono determinate le δd, $\delta' d'$, i punti δ, δ', δ'' ec. apparterranno alla projezione d'una sezion piana fatta per l'asse paralellamente al piano II°; la qual projezione, perchè è necessariamente eguale e simile alla sua corrispondente obbiettiva, esprime la figura di essa, cioè di qualunque sezione fatta nella superficie da un piano condotto per l'asse.

§. 58. Poichè sarà descritta la figura della sezione predetta, facilissima cosa è determinare il punto, o i punti della superficie, i quali corrispondono ad una data projezione M.

Imperciocchè si ponga sopra la XZ la retta pm' eguale alla PM, e per m' sia condotta una normale alla stessa XZ, conducendola a segare in n la già descritta curva. Per quel punto n si conduca una retta indefinita nq paralella alla XZ; e sarà nella nq, sul piano II°, la projezione di quel circolo che nella superficie data passa pel punto projettato in M sul piano I°. Se dunque per M si condurrà una retta nor-

male alla XZ che vada a segare in *m* la *nq*, saranno M—*m* projezioni di un punto che è nella superficie data.

Che se la retta *m' n*, prodotta indefinitamente, andrà a segare in alcun altro punto l'accennata curva che rappresenta una sezion piana fatta per l'asse, si ripeterà l' operazione ed il ragionamento fatto sopra al punto precedente; e perciò col metodo medesimo verranno determinati tutti i punti della superficie i quali hanno sul piano I° la medesima projezione M, e per conseguenza le loro projezioni sul II° sono in una medesima normale alla XZ condotta pel dato punto M §. 8.

§. 59. Appartengono pure alla definizione del §. 48 quelle superficie che son chiamate elicoidiche, perchè la loro direttrice è un' elica. Si chiama poi con tal nome una curva descritta sopra una superficie per lo più cilindrica o conica, in guisa che ravvolgasi intorno ad essa estendendosi indefinitamente quanto la lunghezza della superficie medesima. La specie di cui si fa più frequente uso e nella meccanica e nell'architettura è quella descritta sopra una superficie cilindrica retta, con tal condizione, che da quali punti si voglia assegnare nell' elica conducendo altrettante rette perpendicolari alla curva che è base della superficie cilindrica, le differenze di coteste perpendicolari successive procedano proporzionali agli archi della base da esse intercetti. Tale è il filo d'una vite, come pure la linea secondo cui sale una scala a chiocciola.

Se intendiamo che una linea generatrice si mova lungo un' elica data per direttrice, in modo che essa generatrice descriva con tutti i suoi punti altrettante linee paralelle alla data direttrice, la superficie che verrà descritta, in cui giacciono tutte le accennate linee paralelle, sarà di quella forma che si chiama elicoidica.

Supponghiamo che la generatrice sia retta, e nel suo movimento si conservi sempre paralella al piano in cui supponghiamo la base della superficie cilindrica; nascerà quella

superficie che forma d' ordinario l' erta d' una scala a chiocciola.

Se la retta che noi consideriamo porti seco un semicircolo o una semiellisse, il cui piano rimanga sempre similmente inclinato rispetto all' elica direttrice, nascerà la superficie di quella volta che suol coprire una scala della forma anzidetta.

Ma io non mi dilungherò più oltre in esempj, essendo persuaso che i pochi, intorno ai quali abbiamo versato, debbano essere sufficienti a mostrare come dalla definizione si deduca la rappresentazione grafica di qualunque superficie, e come da questa rappresentazione si deduca qualunque sezione piana paralella, e anche solo perpendicolare, a qualunque dei piani coordinati; dal che, in generale, dipende la determinazione di qualunque punto spettante alla superficie, del quale sia data una sola projezione; In queste cose, siccome abbiamo affermato sul principio, consiste la completa determinazione d' una superficie, e per esse potrà sempre un artefice costruire materialmente la superficie medesima con quella esattezza della quale è suscettibile l' uso degli istrumenti meccanici.

CAPITOLO IV.

Sopra la permutazione dei piani coordinati.

§. 60. Occorse già replicatamente l' occasione di osservare che più o men comoda è una costruzione secondo le posizioni diverse nelle quali l' oggetto di cui si tratta può trovarsi collocato rispetto ai piani coordinati §§. 47, 57. Gioverà dunque procacciare la posizione che sarà giudicata più opportuna, tramutando il dato sistema di piani coordinati in un altro più acconcio all' uopo. E di cotesta permutazione fu già stabilito il principio generale nel §. 39. Ma, perchè nella pratica è spesso necessario costruir molte linee

l' intreccio delle quali confonde, o almeno stanca l'attenzione, stimo util cosa parlare minutamente sul metodo di eseguire la costruzione più semplicemente che far si possa, per quanto io credo.

Fig. 27 Date su due piani coordinati le projezioni A—*a*, B—*b*, C—*c* ec. d' un sistema di punti, descrivere le projezioni di essi sopra un altro piano dato, le cui intersecazioni coi piani coordinati sono le D*h*—DL.

È chiaro che la risoluzione di questo problema si riduce a condurre da ciascheduno dei punti dati una perpendicolare sul piano dato, e a descrivere i punti ove le dette perpendicolari incontrano quel piano. Ma applicando senz' altro artificio la costruzione del §. 39 al caso nostro, verrebbe ingombrata di linee tutta la figura senza vantaggio alcuno in quanto all' esattezza, e con dispendio d' opera non breve. Propongo dunque il seguente ordine di operazioni.

Si trovi l' angolo d' inclinazione formato dal piano proposto con uno dei coordinati, a cagion d' esempio col piano I° §. 34. Facciasi KOZ eguale all' angolo predetto e producansi indefinitamente dall' una e dall' altra parte del punto O i lati OZ, KO.

Sopra l' intersecazione DL conduciamo le perpendicolari AI, BII, CIII, ed applichiamo sulla OZ la lunghezza BII da O in 2. Poi nel prolungamento della stessa ZO dalla parte opposta ponghiamo le due O1, O3 ordinatamente eguali alle due AI, CIII. La disposizione di queste due misure in senso opposto alla precedente corrisponde alla circostanza di posizione in cui si trovano le due perpendicolari AI, CIII, le quali procedono opposte all' altra BII.

Ora dai punti 1, 2, 3 s' innalzino le normali 1*a*', 2*b*', 3*c*', e facciansi ordinatamente eguali alle distanze dei punti *a*, *b*, *c* dalla XZ, i quali trovandosi tutti dalla medesima parte superiore di essa retta XZ, pure da una medesima parte della retta OZ procederanno tutte le normali 1*a*', 2*b*', 3*c*'. Espongasi una retta $\mathcal{LD}$, e sopra di essa preso ad arbi-

trio un punto 'I, pongasi la parte 'I 'II eguale alla I II, indi la 'I 'III eguale alla I III, e sian condotte le perpendicolari 'I $\mathcal{A}$, 'II $\mathcal{B}$, 'III $\mathcal{C}$. Dai punti a', b', c' conduciamo sulla OK le perpendicolari a' 1', b' 2', c' 3', ec. e facciasi 'I $\mathcal{A}$ eguale ad O 1', 'II $\mathcal{B}$ eguale ad O 2', 'III $\mathcal{C}$ eguale ad O3'.

Dico che i punti $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ hanno reciprocamente fra loro quella posizione che aver debbono sul dato piano le projezioni dei punti obbiettivi, talchè posta la retta $\mathcal{L}\mathcal{D}$ sulla LD col punto 'I sul punto I e coi punti 'II, 'III rispettivamente applicati sui punti II, III, se facciasi rotare il piano $\mathcal{L}\mathcal{A}\mathcal{D}$ intorno alla LD finchè si adatti al piano proposto, si farà cadere il punto $\mathcal{A}$ sul punto ove il piano proposto è incontrato dalla perpendicolare condottavi pel punto corrispondente alle projezioni A—a, e similmente i punti $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ cadranno in quelli ove il piano proposto è incontrato dalle perpendicolari che ad esso supponghiamo condotte pei rimanenti punti obbiettivi.

Imperciocchè supponghiamo eseguita nel modo superiormente indicato la sovr'imposizione del piano $\mathcal{L}\mathcal{B}\mathcal{D}$ al piano proposto. La retta 'II$\mathcal{B}$ cadrà in quella dove il detto piano è segato da un altro che si elevi perpendicolare al piano I°, conducendolo per la B II. In questo medesimo piano si troverà e il punto obbiettivo corrispondente alle projezioni B—b, e la retta normale al piano I° che unisce quel punto medesimo colla sua projezione B, e finalmente ancora quella retta che si conduce da esso punto perpendicolare al proposto piano.

Supponghiamo che l'ideato piano secante, rotando intorno alla BII, venga a porsi sul piano I° conservando in se descritte tutte le enumerate linee. L' intersecazione del piano secante col piano proposto cadrà sulla retta IIγ, la quale formi l' angolo BIIγ eguale all' angolo KOZ. La normale che unisce il punto B col suo punto obbiettivo corrispondente, cadrà nella Bβ normale in B alla BII ed eguale alla distanza del punto b dalla XZ. Laonde il punto obbiettivo

projettato in B—b cadrà in β, e per conseguenza la normale che da quel punto si conduce al piano proposto cadrà sulla $\gamma\beta$ normale in γ alla IIγ. Adunque la IIγ determina la distanza che deve avere dalla D L la nuova projezione del detto punto considerato nel piano proposto.

Ora si fa manifesto che la costruzione II B$\beta\gamma$ è quella stessa che fu eseguita in 2 O 2'b' e che la O 2' eguaglia la IIγ. Se dunque pongasi la $\mathcal{L}\mathcal{D}$ sopra la L D col punto 'I sul punto I e col punto 'II sopra il punto II, facendo così rotare il piano $\mathcal{L}\mathcal{B}\mathcal{D}$ intorno alla L D, il punto $\mathcal{B}$ perverrà in quello ove cade la perpendicolare condotta sul piano proposto dal punto projettato in B—b.

Il medesimo ragionamento applicato a ciascun altro dei dati punti mette in chiaro che la costruzione eseguita separatamente, per cui determiniamo le O 1', O 2', O 3', equivale alla costruzione che per ciascun punto dato converrebbe ripetere come la II B$\beta\gamma$.

Pertanto supponghiamo che il piano dato debba subentrare in luogo del piano I° e sopra la $\mathcal{D}\mathcal{L}$ debba insistere perpendicolare al piano $\mathcal{B}\mathcal{D}\mathcal{L}$ un nuovo piano, sul quale si vuol descrivere le projezioni dei medesimi punti dati.

È chiaro che le rette a'1', b'2', c'3' misurano le rispettive distanze che hanno i dati punti dal piano $\mathcal{B}\mathcal{D}\mathcal{L}$. Adunque oltre alle projezioni $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, conosciamo ancora le distanze loro dai corrispondenti punti obbiettivi. Perciò condotte pei punti $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ altrettante normali alla $\mathcal{D}\mathcal{L}$, e prodotte indefinitamente, faremo 'I $\underline{a}$ eguale ad 1'a', 'III $\underline{c}$ eguale a 3'c', ed in senso opposto alle precedenti misure, la 'II $\underline{b}$ eguale alla 2'b', la quale procede oppostamente alle altre due rispetto alla O K. I punti $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, saranno le seconde projezioni corrispondenti alle prime $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

§. 61. Nel precedente §. 60 abbiam supposto per maggiore facilità che i due nuovi piani coordinati siano fra loro normali e si taglino in una retta assegnata, cioè nella D L rappresentata poi dalla $\mathcal{D}\mathcal{L}$. Ora tratteremo il problema in

generale ponendo i nuovi piani coordinati secondo qualunque inclinazione scambievole fra loro.

Indicheremo questi piani colle lettere D, D′, D″ che denotano i punti ove rispettivamente incontrano la comune sezione XZ dei due soliti piani coordinati. Fig. 28

Siano dunque DA, D*a* le rette determinanti il piano D: D′ A′, D′ *a*′ quelle che determinano il piano D′, e dalle D″ A″, D″ *a*″ venga determinato il piano D″. Perchè le coordinate riferite a ciascheduno di questi piani debbon essere paralelle all' intersecazione dei due rimanenti §. 1, converrà conoscere le tre intersecazioni scambievoli di questi piani. Esse verranno determinate col metodo che spiegasi nel §.40; e quella del piano D col piano D′ verrà projettata in MN — *mn*; PQ — *pq* saran projezioni di quella ove tagliansi i piani D′, D″; la terza poi spettante ai piani D, D″ avrà le projezioni RS — *rs*. Tutte e tre le menzionate rette concorrer debbono in un punto, e questo avrà le projezioni T — *t*.

Saran dunque determinati gli angoli di scambievole inclinazione che le intersecazioni mentovate formano insieme combinandosi a due a due §. 18. Perciò esporremo i tre angoli *qtn*, *nts*, *stq*′, dei quali il primo eguagli l' angolo formato dalle due intersecazioni dei piani D, D″ col piano D′: il secondo eguagli l' angolo formato dalle due intersecazioni dei piani D′, D″ col piano D: il terzo finalmente eguagli l' angolo formato dalle due intersecazioni dei piani D, D′ col piano D″. Fig. 29

Supponghiamo che l' operazione dimostrata nel §. superiore si riferisca al piano D, così che la retta $\mathcal{D}\mathcal{L}$, Fig. 27, rappresenti la DM, Fig. 28, ed $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, Fig. 27, siano sul piano D projezioni rette dei punti dati, le quali si riferiscono alla retta $\mathcal{D}\mathcal{L}$ ed all' origine $\mathcal{D}$.

Dovendosi riferire al punto *t*, Fig. 29, l' origine delle nuove coordinate, perchè *t* rappresenta il punto comune ai tre nuovi piani §. 1, sarà mestieri determinare sul piano *stn* la posizione che deve avere rispetto alle *tn*, *ts* ed al

punto *t* la retta corrispondente alla D M, Fig. 28, che è pure rappresentata dalla $\mathcal{D}\,\mathcal{L}$, Fig. 27 .

Poichè dunque M è il punto, Fig. 28, dove s' incontrano l' obbiettiva delle MN — *mn* e la D M, sarà determinato sulla *nt* il punto $\mathcal{M}'$ corrispondente al punto M, Fig. 28, dovendo essere *t* $\mathcal{M}'$ eguale alla lunghezza della retta projettata in TM — *tm* , Fig. 28 . Perciò a determinare compiutamente la posizione della retta cercata, null'altro manca se non la misura dell'angolo che deve formare colla $\mathcal{M}'n$, Fig. 29, la qual misura è determinata dalle projezioni DMN — D*mn*, Fig. 28, e si troverà per mezzo del §. 18 . Ciò posto, conoscendosi dalla figura citata che il detto angolo deve comprendere la retta projettata in TS — *ts* , rendesi manifesto che la retta cercata , la quale devè passare per $\mathcal{M}'$, Fig. 29, dovrà formare colla $\mathcal{M}'n$ un angolo $n\mathcal{M}'$D' eguale al trovato, ed applicato alla $n\mathcal{M}'$ in modo che comprenda la retta *ts*. In tal guisa la retta $\mathcal{M}'$D' della Fig. 29 sarà posta convenientemente per rappresentare la posizione della D M , Fig. 28, rispetto alle rette projettate in TN — *tn* , TS — *ts* , le quali rette medesime sono rappresentate rispettivamente dalle *t n* , *t s* , Fig. 29. Che se poi prenderemo la retta $\mathcal{M}'$ D', Fig. 29, eguale alla M D , Fig. 28 , il punto D' corrisponderà manifestamente al punto D . Dalle quali cose apparisce che, poste le misure D' I, D' II, D' III, Fig. 29, eguali ordinatamente alle $\mathcal{D}$ 'I, $\mathcal{D}$ 'II, $\mathcal{D}$ 'III, Fig. 27, e condotte le normali I A, II B, III C , Fig. 29, ordinatamente eguali alle 'I $\mathcal{A}$, 'II $\mathcal{B}$, 'III $\mathcal{C}$, Fig. 27 , i punti A , B , C , Fig. 29 , saranno convenientemente collocati nel piano *nts*, e rappresenteranno in esso le projezioni rette dei punti dati . Ed essendo pur note le distanze che questi punti debbono avere dal detto piano , le quali corrispondono alle misure 'I $\underline{a}$, 'II $\underline{b}$, 'III $\underline{c}$, Fig. 27, essi punti saranno compiutamente determinati di posizione relativamente alle due rette *tn* , *t s* , Fig. 29 , che rappresentano le intersecazioni del piano D coi piani D', D'', come pure all'intersecazione di questi due ultimi piani ed al punto

to t, che rappresenta il loro punto comune, cioè l' origine delle nuove coordinate.

Per giugnere al fine della nostra costruzione, cerchiamo sul piano D, così nominando il piano tns che lo rappresenta, la projezione della retta in cui si tagliano i piani D', D''.

Abbiam veduto che questa retta deve formare colla tn l' angolo ntq e colla ts l' angolo stq', cioè a dire, se faremo rotare il piano qtn intorno alla tn, ed il piano $q'ts$ intorno alla ts, quando coincideranno in una le due rette tq, tq', allora i due piani menzionati saranno nella debita posizione, e la retta ove coincideranno le due tq, tq' sarà la loro intersecazione. Prendiamo le due tq, tq' eguali fra loro, e pei punti q, q' siano condotte due rette, una perpendicolare alla tn, l'altra alla ts. Tagliandosi queste perpendicolari in q'', si conduca la retta tq'', la quale io dico essere la cercata projezione.

Imperciocchè, rotando i due piani nel modo che fu indicato, il punto q sarà sempre projettato nella retta qq'', siccome il punto q' sarà projettato nella $q'q''$. Adunque coincidendo le due tq, tq', ancora i punti q, q' coincideranno in uno, la cui projezione non potrà essere altrove che nel punto q'' ove tagliansi le due qq'', $q'q''$.

Dopo queste preparazioni l' enunciato del Problema si può concepire nel seguente modo.

Date in un piano D le rette tn, ts, nelle quali è tagliato da due piani D', D'' coordinati con esso; data sul medesimo la projezione tq'' della retta in cui si tagliano gli altri due, la quale è pur data di posizione; date finalmente le projezioni rette A, B, C di alcuni punti, e le distanze loro dalle corrispondenti projezioni predette, trovare le projezioni oblique dei punti medesimi sopra ciascheduno dei dati piani D, D', D''. Fig. 29

Perchè la descrizione della Fig. 29 fu supposta nel piano D, cercheremo di soddisfare al quesito relativamente a questo piano, ed indicheremo soltanto la costruzione per

trovare la projezione obliqua del punto rappresentato in B, giacchè nel modo medesimo si deve operare per aver similmente le projezioni oblique di tutti gli altri,

Dissi nell' enunciato che la retta projettata in tq'', cioè l' intersecazione dei due piani D', D'', è data di posizione, perchè dai dati del quesito, non solo possiamo trovare, come ho mostrato, la projezione tq'', ma si conosce ancora l' inclinazione della retta obbiettiva col piano D, cioè l' angolo ch'essa forma colla sua projezione stessa tq''. In fatti essendo qh la lunghezza d' una retta, di cui è projezione la hq'', se col centro q'' e coll' intervallo hq si descriva un circolo che seghi in Q la th, sarà hQ la misura della distanza che deve avere dalla projezione q'' l' estremo corrispondente della retta projettata in hq'' §. 11. Ma quello è pure estremo della retta projettata in tq''; dunque sarà nota l' inclinazione della medesima retta obbiettiva col piano D, ovvero colla sua propria projezione tq''.

Ora espongasi l' angolo b'Op che misuri la detta inclinazione, ed innalzata normale alla Op la retta Or, prendasi in essa la parte Oβ' eguale alla 'II$\underline{b}$, Fig. 27. Per β' si conduca paralella alla Op la $\beta' b'$ che seghi in b' la Ob'.

Dal punto B facciasi passare una retta BB' paralella alla tq'' ed eguale alla $\beta' b'$. Sarà B' sul piano D la projezione obliqua corrispondente al punto che ha la sua projezione retta in B.

Imperciocchè primieramente è chiaro che la projezione cercata dev' essere in una retta paralella alla tq'' che passi per B, perchè la coordinata relativa alla detta projezione dev' essere paralella all'intersecazione dei piani D', D'' e parte dal punto obbiettivo che ha la projezione retta B §. 1. In secondo luogo il triangolo rettangolo che si forma dalla coordinata obliqua, come ipotenusa, dalla sua projezione, che sarà un cateto, e dalla normale interposta fra 'l punto obbiettivo e la corrispondente sua projezione retta B, che sarà l' altro cateto, eguaglierà il triangolo simile O$\beta' b'$, nel

quale Ob' corrisponde alla coordinata obliqua, $\beta' b'$ corrisponde alla sua projezione, β' O corrisponde alla normale intercetta fra 'l punto obbiettivo e la sua projezione retta B. Perciò B B' eguaglierà la distanza che deve essere tra la projezione obliqua B' e la projezione retta B. Rimane solo a considerare se il punto B' sia convenientemente posto ove lo abbiamo notato o debba essere dalla parte contraria per rispetto al punto B. Ma che il punto B sia collocato a dovere si dimostra chiaramente dalla circostanza che la 'II $\underline{b}$, Fig. 27, è inferiore alla $\mathcal{D}\mathcal{L}$, perchè inferiore al piano D è il punto corrispondente alla projezione B, e quindi la retta che per esso sarà condotta paralella all' obbiettiva projettata in $t\,q''$, incontrerà il piano D in B', e non dalla parte opposta per rispetto al punto B, se il punto corrispondente alla projezione q'' si pone superiore allo stesso piano D; all' opposto poi se pongasi inferiore.

Ho voluto a bello studio condurre un' occasione di ricordar nuovamente quanto importi l' osservanza di queste correlazioni, perchè una sola omissione può guastare l' opera, sebbene esatta in ogni altra parte.

Per evitare la confusione che può nascere nella moltitudine delle linee che abbiam descritte sulla Fig. 29, le quali più non son necessarie per ciò che rimane da costruire, trasporteremo nella Fig. 30 il risultamento delle operazioni precedenti, ed a questa nuova figura si riferirà in seguito il discorso.

Poichè è determinata in B' sul piano D la projezione obliqua del punto obbiettivo che ha sul piano medesimo la sua projezione retta in B, si cerchi la projezione obliqua del medesimo punto sul piano D'. Fig. 30

Pel punto B' sia descritta una retta B' B'' paralella alla $t\,s$, e producasi a tagliare in B'' la $n\,t$. Dal punto B'' si conduca una retta indefinita B''K paralella alla $t\,q$. Dovrà essere nella B'' K la cercata projezione sul piano D' §. 2. Ma questa projezione deve pur essere distante dal punto B'' quant' è la

misura O b', Fig. 29; la detta misura deve poi essere applicata in senso negativo perchè il punto di cui si tratta giace di sotto del piano D, come indica la posizione della 'II $\underline{b}$, Fig. 27; dunque posta la misura B''b eguale alla O b', Fig. 29, sul prolungamento della K B'', in senso opposto alla $t\,q$, sarà b la projezione dimandata sul piano D', supponendo che questo, per la solita rotazione che immaginiamo farsi intorno alla comune sezione col piano D, siasi posto per diritto con esso §. 2.

Se vorremo le corrispondenti projezioni oblique di un altro punto, a cagion d' esempio di quello che ha la projezione retta A, si porrà la misura O α', Fig. 29, eguale alla 'I $\underline{a}$, Fig. 27, e condotta la $\alpha'\,a'$ paralella alla O p', finchè seghi in a' la O b', otterremo nella $\alpha'\,a'$ la misura della distanza che deve avere sul piano D la projezione obliqua cercata dalla projezione retta A. Questa misura si applicherà in A A', Fig. 30, che sia paralella alla $t\,q''$, e proceda in senso opposto alla B B', come dimostra la figura, perchè la normale 'I $\underline{a}$, Fig. 27, procede in senso positivo, cioè superiormente alla $\mathcal{L}\,\mathcal{D}$. Ciò fatto, il punto A' sarà la projezione obliqua che si dimanda sul piano D.

Dal punto A' sia condotta una paralella alla $t\,s$ che seghi in A'' la $n\,t$, e per A'' descrivasi una paralella alla $t\,q$, nella quale dovrà essere la projezione obliqua del medesimo punto obbiettivo sul piano D' §. 2. Perchè poi questa projezione dovrà essere distante dal punto A'' quant' è la misura O a', Fig. 29, porremo la lunghezza A''a eguale a detta misura, applicandola in senso opposto alla B'' b, perchè oppostamente procedono le 'I $\underline{a}$, 'II $\underline{b}$, Fig. 27, e sarà a la cercata projezione sul piano D'.

Similmente procederemo per qualunque altro punto che sia determinato come i precedenti; ed in qualunque modo sia posto dall' una, o dall' altra parte di qual si voglia fra i nuovi piani coordinati, potremo sempre determinare sopra di esso le corrispondenti projezioni oblique. Questo traspor-

to di coordinate a piani obliqui, di cui raro è il bisogno nelle pratiche ordinarie, parvemi che dovesse essere ciò nulla ostante insegnato, acciocchè la dottrina delle projezioni non rimanga scema, nè si formino idee incomplete intorno all' estensione ed all' uso dei metodi grafici, specialmente se si voglia compararli a quelli che somministra l' analisi algebrica.

§. 62. Se un dato sistema di punti rappresentati per mezzo di projezioni rette si può correlativamente rappresentare per mezzo di projezioni oblique sopra un dato sistema di piani coordinati obliquamente fra loro, per converso dalle rappresentazioni oblique si passerà alle rette, seguendo con ordine retrogrado le operazioni insegnate dal precedente paragrafo. In qualunque modo sian dunque dati i punti obbiettivi, sapremo cangiare le rappresentazioni di essi, ed accomodarle a quelle condizioni che verranno dimandate dalle particolari circostanze in ogni caso.

§. 63. Ma se possiamo trasferire da uno in altro sistema le projezioni di qualunque punto dato, potremo eseguire la medesima tramutazione per tutti i punti assegnabili in una data linea; e perciò, date le projezioni di essa in qualunque sistema, potremo trovare le projezioni correlative in altro sistema qual si voglia.

§. 64. Finalmente se possiamo tramutare da uno in altro sistema le projezioni d' una linea, potremo operare lo stesso per una generatrice di qualunque data superficie, e così pure per le corrispondenti direttrici. Perciò, se sarà data una superficie riferita ad un sistema di piani coordinati, potremo, coi metodi superiormente esposti, riferirla ad un altro dato sistema di piani coordinati, e trovarne sopra di essi le rappresentazioni corrispondenti.

Di tutte queste permutazioni da uno ad altro sistema di piani coordinati ad angoli retti, abbiamo veduto alcuni saggi nei §. §. 47, 57, i quali bastano per far conoscere a che possano servire le teorie spiegate nel presente capitolo; e sulle

loro applicazioni di maggior uso avremo in seguito non rara opportunità di fare esperimento.

CAPITOLO V.

Delle intersecazioni e dei contatti fra linee e superficie, e fra superficie.

§. 65. Poichè si è ragionato bastantemente nel Cap. II° intorno alle intersecazioni scambievoli ed ai contatti fra linee e linee, seguita che alcuna cosa si dica sopra le intersecazioni ed i contatti delle linee colle superficie e delle superficie fra loro.

Quanto alla prima di queste due parti, assai brevemente sarà soddisfatto spiegando come le dottrine che la risguardano derivano da quelle concernenti le intersecazioni delle superficie, cioè a dire da ciò che forma l' argomento della seconda parte.

In fatti una linea qualsivoglia, che sia data per mezzo delle sue projezioni, può concepirsi descritta sopra una superficie cilindrica, la cui generatrice sia una retta normale ad uno dei piani coordinati e la direttrice sia la projezione della data linea su quel medesimo piano §. §. 7, 41. Ciò posto, se sia pur data una superficie qualunque, la quale abbia qualche punto comune colla data linea, cotesto punto sarà pur comune alla data superficie e alla superficie cilindrica, ove intendiamo essere descritta la data linea. Descritta dunque l' intersecazione di queste due superficie, sarà dessa una linea che ha comune colla linea data qualunque punto ove questa incontri la data superficie. Adunque le projezioni dell' accennata intersecazione e quelle della data linea avran comuni le projezioni del punto o dei punti ov' essa incontra la data superficie §. 12.

A questa teoria semplicissima che non parmi richiedere più diffusa dichiarazione aggiungiamo solo un esempio.

Si proponga di trovare i punti ove una superficie sferica, le cui projezioni sono i circoli C — *c*, è segata da una curva data per mezzo delle projezioni ABD — *abd*. Se immaginiamo una superficie cilindrica normale al piano I° ed insistente sulla projezione ABD, in questa superficie cilindrica giacerà la curva data. Per trovare l'intersecazione di essa superficie colla data superficie sferica, immaginiamo una serie di piani paralelli al piano II° che seghino ad un tempo ambedue le superficie. L'una, cioè la sferica sarà tagliata in altrettanti circoli: l'altra sarà segata in rette linee normali al piano I°. I punti nei quali si tagliano quelle rette e quel circolo, che sono in un medesimo piano secante, appartengono all'intersecazione delle due superficie. Fig. 31

Passi un de' piani secanti per la retta M N, la quale tagli in M ed N la circonferenza del circolo C, ed in L la curva A B D. La sezione che nasce nella superficie cilindrica sarà una retta projettata in L sul piano I° e nella *ol* sul piano II°, la quale *l o* sarà condotta dal punto L normale alla X Z. Il circolo poi che nasce per la sezione della superficie sferica avrà il diametro eguale alla M N, e la sua projezione sul piano I° sarà la stessa MN; sul piano II° poi sarà un circolo descritto col centro *c* e col raggio eguale alla metà di M N. Ponghiamo che questo circolo così descritto seghi in *o* ed *o'* la retta *l o*, e saranno *o*, *o'* projezioni di due punti giacenti nell'intersecazione cercata §. 29. Similmente operando determineremo quante altre projezioni ci sarà di bisogno, corrispondenti ad altrettanti punti della detta intersecazione, e così potremo descrivere la projezione della medesima sul piano II°, la quale supporremo che sia la curva *u o r s r' o' u' u*. Questa curva taglia in *i* ed *i'* la data projezione *a b d*, e nei punti *i*, *i'* saranno le projezioni di due punti obbiettivi, ove la data curva corrispondente alle projezioni ABD — *abd* interseca la data superficie sferica. Le due projezioni dei medesimi punti sul piano I° saranno tosto determinate conducendo per *i* ed *i'* due rette perpendicolari

alla X Z, che vadano rispettivamente ad incontrare in I ed I' la curva A B D, giacchè in essa debbon essere le projezioni dei punti accennati §. 7.

§. 66. Fingiamo che una linea data incontri in più d'un punto una data superficie, e nominiamo A, B due di questi punti prossimi fra loro. Immaginiamo ancora che la data linea movasi con qualche legge intorno al punto A per modo che il punto B si accosti di mano in mano al punto A e finalmente coincida con esso. Allora si dice che la data linea tocca la data superficie nel punto A. Se dunque supporremo che il punto mobile B, nell' accostarsi al punto A per coincidere finalmente con esso, scorra sopra una linea descritta sulla data superficie, allorchè quella data linea mobile toccherà la detta superficie nel modo che abbiamo spiegato di sopra, toccherà pure la supposta linea descritta nella superficie medesima §. 23; e queste due linee avranno perciò la tangente comune nel punto A §. 24.

§. 67. Reciprocamente se una data linea tocchi in un punto A un' altra linea che sia descritta in una data superficie, toccherà pure in quel punto la superficie medesima.

§. 68. Oltre di ciò, se la data linea tocchi la data superficie, toccherà pure l' intersecazione di questa colla superficie cilindrica eretta sulla projezione della stessa linea data.

Imperciocchè fingiamo che la supposta linea, prima di toccare, seghi la superficie data in due punti A, B, e si trasferisca al contatto in A passando successivamente da una in altra posizione, in ciascheduna delle quali il punto B si accosti al punto A più che nella posizione precedente. L'intersecazione fra la superficie data e la superficie cilindrica contenente la data curva §. 65, avrà comuni colla curva stessa i punti A, B, in qualunque posizione essa sia considerata, e quanto più saran vicini i detti punti A, B, tanto più la secante comune alle due curve, determinata per essi, si accosterà alla tangente nel punto A. Adunque, pervenuta che sia la curva data in quella posizione ove il punto B coin-

coincide con A, l'intersecazione accennata e la stessa curva data avran comune la tangente in quel punto §. 24, cioè a dire si toccheranno.

Perciò se nel caso proposto §. 65, la curva data per le projezioni ABD — *abd* toccasse la data superficie sferica, la curva *u r s u' u* toccherebbe la curva *a b d*.

§. 69. Per converso poi la curva data toccherà la data superficie quando tocchi l' intersecazione sopra definita della superficie cilindrica colla superficie proposta; e quindi nel citato caso diremo che la data curva tocca la data superficie sferica quando la *u r s u' u* tocchi la *a b d*, ed insieme la projezione sul piano $\mathfrak{B}^{\circ}$ corrispondente alla *u r s u' u* tocchi la A' B' D' §. 24.

§. 70. Quella stessa linea che tocca una data superficie in un dato punto A può rotare intorno alla retta tangente, e così mutar posizione, rimanendo sempre in contatto sì colla superficie e sì colla tangente stessa nel medesimo punto A.

Perciò non si può dire che una curva sia determinata di posizione, quando, conoscendosi la sua figura, sia data solamente la posizione di un punto A dov'essa tocchi una data superficie, e la retta tangente comune alla curva ed alla superficie nel punto A.

Ma fra tutte le posizioni che la curva può prendere intorno alla tangente, è da notarsi quella in cui la normale della curva è perpendicolare alla superficie. In questo caso si trovano nel contatto della linea colla superficie condizioni analoghe a quelle che accompagnano il contatto fra due linee costituite in un medesimo piano §. 22.

§. 71. Una retta si dice normale ad una data superficie in un dato punto A, quando è perpendicolare al piano che tocca in A la detta superficie.

Conosceremo dunque la posizione della normale, quando si conosca la posizione del piano tangente §. 39. Si spiegherà fra poco il criterio di questo contatto. Intanto osservia-

mo che una linea curva la quale incontri una superficie curva in un punto §. 65, forma ivi colla superficie un angolo d' inclinazione misurato dall' angolo d' inclinazione che forma la tangente della curva col piano tangente la superficie nel medesimo punto §. 25.

§. 72. Veniamo alle intersecazioni delle superficie. Posto che due superficie si taglino scambievolmente, per tutti i punti assegnabili nella loro intersecazione si può concepire che passino altrettanti piani paralelli ad uno dei piani coordinati. Nascerà nell' una e nell' altra superficie una serie di sezioni, le quali saranno rispettivamente eguali e simili alle loro projezioni sul detto piano coordinato. Ogni piano secante conterrà la sezione fatta nell' una superficie e la corrispondente fatta nell' altra. Queste due sezioni avranno dunque comuni alcuni punti che spettano all' intersecazione delle due superficie. Perciò, descrivendo successivamente le projezioni delle sezioni fatte da ciascun piano secante le due superficie, i punti comuni ad esse projezioni saranno essi pure altrettante projezioni di punti che spettano all' intersecazione dimandata, la quale potrà così essere determinata.

§. 73. Determinare per mezzo delle projezioni l' intersecazione di una superficie sferica, con una superficie cilindrica, la cui direttrice sia un circolo massimo della data superficie sferica.

Fig. 32 Ponghiamo che il piano del detto circolo massimo sia paralello al piano II°, poichè se non sia dato in questa posizione, potrà sempre ridursi a norma del Cap. IV. Siano dunque C—*c* i due circoli ne' quali è projettata la superficie sferica. B B' sia sul piano I° la projezione del circolo massimo che fa ufficio di linea direttrice per la superficie cilindrica. CM—*cm* rappresentino le projezioni d' una retta che passi pel centro della superficie sferica e sia paralella alla generatrice della superficie cilindrica.

Si rappresenti nella retta DΔ la projezione di un piano

secante l' una e l' altra superficie e paralello al piano II°. Sarà D' D projezione del circolo che nasce nella superficie sferica e Δ' Δ projezione di quello che nasce nella superficie cilindrica. Sul piano II° poi la projezione del primo circolo sarà un altro circolo, che ha il centro in *c* e si descrive col semidiametro eguale alla metà della D' D. Il secondo circolo che spetta alla superficie cilindrica sarà eguale al massimo della sfera, eguale pure e paralello alla sua projezione descritta sul piano II°. Per descrivere questa projezione osserviamo che le rette CM—*cm* son projezioni dell' asse della superficie cilindrica, e però il circolo che nasce in essa per la supposta sezione avrà il centro projettato in M sul piano I°, ove la C M interseca la D Δ, e projettato in *m* sul piano II°, ove la *cm* è segata da una retta che per M sia condotta normale alla X Z. Adunque la projezione di questo circolo sul piano II° sarà un circolo descritto col centro *m* e col semidiametro eguale ad M Δ ovvero a C B'. Descrivasi questo circolo, il quale seghi l'altro descritto precedentemente ne' punti *i*, *i'*, e saran essi altrettante projezioni di punti che spettano all' intersecazione dimandata.

Similmente otterremo quanti altri punti si voglia pei quali si farà passare una linea *i g h h' g' i' i*, e questa sarà projezione della cercata, sul piano II°.

Che se pei punti *i*, *i'* sian condotte normali alla XZ le rette *i* I, *i'* I', le quali seghino in I, I', rispettivamente, la D' D, saranno i punti I, I' le projezioni sul piano I° corrispondenti alle due *i*, *i'* già notate sul piano II°. In simil modo otterremo quanti altri punti saran necessarj come i due precedenti I, I' per descrivere la projezione della richiesta curva sul piano I°.

§. 74. Il metodo ora esposto delle sezioni piane paralelle ad un piano coordinato è generalmente applicabile a qualunque caso. Ma non si deve usare senza aver prima esaminato se le particolari circostanze d' un problema ammettano qualche artificio che renda più semplice, ed in con-

seguenza più esatta la descrizione, di cui fa mestieri per risolverlo. Possiam vederne alcuni esempj nelle più semplici superficie, come sono le coniche e le cilindriche.

Fig. 33 Date le intersecazioni ABC, DEF di due superficie coniche con uno dei piani coordinati, che suppongo essere il piano I°; date ancora le projezioni M — *m* del vertice della prima superficie, e le projezioni P—*p* del vertice della seconda; si vuol determinare l' intersecazione di queste due superficie.

Se immaginiamo un piano paralello al piano II° che seghi ambedue le superficie date, le sezioni saranno due curve, quando non accada che il piano secante passi per ambi i vertici. Sarebbe dunque mestieri per ogni sezione descrivere un sistema di curve, onde avere alcuni punti che spettino alla linea d' intersecazione ch' è dimandata. Quanta fatica e quanto pericolo di errore abbia in se questo metodo, ognuno può facilmente immaginare senza farne esperimento.

Ma quando si voglia por mente alla natura delle superficie proposte, non sarà malagevole scoprire che v' ha una maniera di risolvere il problema per mezzo di sezioni tutte rettilinee che possiam fare nelle due superficie, e questo metodo sarà manifestamente da preferire all' altro.

Si concepisca una retta condotta pei due vertici. Le sue projezioni saranno le rette indefinite MP — *mp*. Se per quella retta faremo passare una serie di piani secanti ambedue le date superficie, tutte le sezioni che verran fatte in esse saranno rette linee, per le intersecazioni delle quali potremo determinare i punti della linea in cui si tagliano scambievolmente le due superficie.

Perchè gl' immaginati piani secanti passano tutti per la medesima retta determinata dai due vertici, le intersecazioni di essi piani col piano I° passeranno tutte pel punto d'incontro dello stesso piano I° colla retta mentovata. Trovisi dunque il detto punto d' incontro §. 11, e sia K. Condotta una retta KE che seghi ambedue le curve ABC, DEF, essa

rappresenterà l'intersecazione del piano I° con un piano secante condotto pei vertici . La sezione che farà questo piano nella prima superficie sarà una retta che passerà per B, dove la K E sega la curva ABC; e la sezione nella seconda superficie sarà pure una retta che passerà per E, dove la stessa K E sega l'altra curva D E F. Conduciamo per B una retta perpendicolare in *b* alla X Z, e per E un'altra retta pure normale alla X Z in *e*; descritte le due rette *b m*, *p e*, saranno manifestamente B M — *bm* projezioni della retta in cui vien segata la prima superficie, PE — *pe* saranno projezioni dell' altra retta in cui vien segata la superficie seconda . Adunque il punto *i* dove si tagliano le due *bm*, *pe*, sarà sul piano II° projezione d'un punto comune alle due rette obbiettive sopra indicate; e sul piano I° sarà I, dove si tagliano le due B M, P E, projezione del medesimo punto. Laonde I — *i* saran projezioni d' un punto che spetta all'intersecazione cercata. Similmente potremo determinare quanti altri punti sarà di bisogno .

§. 75 . Date le intersecazioni BAC, DEF di due superficie cilindriche col piano I°; date le projezioni A M — *a m* d' una generatrice della prima superficie, e le due PE — *pe* projezioni d' una generatrice della seconda; si dimanda l'intersecazione di queste due superficie . Fig. 34

In questo problema incontreremo le obbiezioni notate nel precedente se vorremo applicare alla sua risoluzione il metodo del §. 72 senz' altro discernimento; ma per lo contrario si conseguirà la medesima agevolezza che abbiamo superiormente ottenuto, sol che il metodo generale si accomodi alla natura particolare delle due superficie proposte.

Per un punto qual si voglia della generatrice projettata in AM—*am* si guidi una retta paralella alla generatrice projettata in P E — *p e* §. 12 .

La prima generatrice, e la paralella alla seconda determineranno un piano che nomineremo Π, al quale se v' abbia una serie di piani paralelli e secanti ambedue le super-

ficie, le sezioni da essi prodotte nell' una e nell' altra saranno tutte rettilinee. Si trovi l'intersecazione dell'accennato piano Π col piano I°, e sia questa la retta AG §. 32. Paralella alla AG sia condotta una retta F B B' che seghi ambedue le curve B A C, D E F, la prima in B e B', la seconda in F. La retta B F rappresenterà l'intersecazione del piano I° con un piano paralello al piano Π, che sega ambedue le superficie cilindriche. Pei punti B, B' passeranno le rette ove è segata la prima superficie, e pel punto F passerà quella ove è segata la superficie seconda. Conduciamo pei punti B, B', F tre rette ordinatamente perpendicolari in *b*, *b'*, *f* alla XZ, e pei punti *b*, *b'* due rette *b i*, *b' i'* paralelle alla *a m*, le quali saranno projezioni delle due che nascono per la sezione della prima superficie cilindrica; pel punto *f* si conduca poi la *f i* paralella alla *p e*, e sarà projezione di quella che nasce per la sezione della superficie seconda §. 12. Adunque i punti *i*, *i'*, dove quelle rette si tagliano, saran projezioni di altrettanti punti che spettano all' intersecazione delle due superficie.

Per ottenere le projezioni dei medesimi punti sul piano II°, condurremo per B e B' le paralelle B I, B' I' alla A M, e per F la F I paralella alla P E. Le tre rette così descritte si taglieranno in due punti I, I', i quali saranno necessariamente le projezioni corrispondenti alle due *i*, *i'* già determinate sul piano II°. Similmente otterremo tutti gli altri punti che veggansi necessarj per descrivere le projezioni dell' intersecazione dimandata.

Ma vuolsi avvertire che l'intersecazione di due superficie può essere composta di più curve distinte e separate l' una dall' altra (*). Ogni piano secante le due superficie potrà se-

(*) A rigore sono rami diversi di una curva medesima, compresi da una sola espressione analitica, che è quanto dire determinati da una medesima definizione.

gare ad un tempo le due, o più curve distinte, delle quali è composta l'intersecazione fra le due superficie. Per la qual cosa è necessaria molta attenzione per non confondere i punti che spettano ad una curva con quelli che spettano all' altra, onde poi descrivere ciascheduna di esse secondo la serie dei punti relativi alla medesima.

§. 76. Se le superficie proposte, invece che siano ambedue coniche, o ambedue cilindriche, saranno una conica e l' altra cilindrica, si condurrà una retta pel vertice della superficie conica in direzione paralella alla generatrice della superficie cilindrica, e per questa retta facendo passare una serie di piani seganti ambedue le superficie, le sezioni saran sempre rettilinee, com' è manifesto; nè il metodo da seguire in questo caso differirà da quello esposto nei due precedenti §§. 75, 74; ma tutto si eseguirà nella medesima maniera, avvertendo solo che le sezioni fatte nella superficie cilindrica saranno tutte rette paralelle fra loro, e quindi pure fra loro paralelle saranno le projezioni di esse; le sezioni poi della superficie conica tutte concorreranno nel vertice, e le projezioni loro dovranno per conseguenza concorrere nella projezione di quello.

§. 77. Determinare l' intersecazione d' una data superficie sferica con una data superficie conica.

Le projezioni della prima sian date ne' due circoli C—*c*. Fig. 35
Nella curva A B E sia segato il piano I° dalla superficie conica, ed M—*m* sian le projezioni del suo vertice.

Se pel vertice si condurrà una serie di piani, tutti secanti ambedue le superficie, è chiaro che le sezioni fatte nella sferica saranno circoli, e quelle fatte nella conica saranno rette linee. Pei punti ne' quali s' incontrano scambievolmente ciascheduno dei detti circoli e le rette esistenti nel medesimo piano secante, passerà l' intersecazione delle due superficie. Esaminiamo la costruzione che si deve eseguire per uno degli indicati piani secanti, ed il metodo medesimo servirà per tutti gli altri.

Supponendo che tutti i piani secanti siano perpendicolari al piano I°, fingiamo che uno di essi passi per la retta MB, la quale sia condotta per M in modo che incontri e la curva A B E, ed il circolo C. Sia questo segato in D, D', e quella segata in B. Quella sezione che nasce nella data superficie sferica sarà un circolo, il cui diametro eguaglierà la retta DD', e sarà in essa projettato sul piano I°. Nella superficie conica poi nascerà una sezione rettilinea che passerà pel vertice e pel punto B.

Espongasi una retta O B', e ad essa normale in O la O *m'*, che eguagli la *m* N condotta normale da *m* sulla X Z. Sia pur fatta la O K eguale alla distanza del centro *c* dalla XZ, e tirata K R paralella ad O B', facciasi eguale alla M L, essendo L il punto che divide per mezzo la DD'. Pongasi ancora eguale alla M B la O B', e si congiunga la *m'* B'. Ciò fatto, col centro R e coll' intervallo LD si descriva un circolo che seghi in *i* ed *i'* la *m'* B'. La descrizione di questo circolo e della retta *m' i* B' rappresenta la sezione che nasce nelle due superficie; imperciocchè se fingasi la retta B' O trasportata sulla B M sì che il punto O cada sul punto M, ed il punto *m'* facciasi coincidere col vertice della superficie conica, la retta *m'* B' cadrà in quella ove la detta superficie è tagliata dal supposto piano, ed il circolo R coinciderà con quello ove è segata la superficie sferica. Adunque i due punti *i*, *i'* cadranno in quei medesimi punti ove il piano secante taglia la curva d'intersecazione fra le due superficie. Perciò le projezioni di quei punti sul piano I° dovranno essere distanti dal punto M, rispettivamente, quanto i corrispondenti punti *i*, *i'* sono distanti dalla *m'* O. Misurata dunque la distanza del punto *i* dalla retta *m'* O e trasportata la misura sulla MB da M in I, sarà I la projezione dell' uno; e similmente si troverà la projezione I' dell' altro punto sul piano I°.

Ora sia condotta per B una normale in *b* alla X Z e congiungasi la *m b*, che sarà projezione della retta ove è se-

ga-

gata la superficie conica. Adunque sopra la $b\,m$ saranno le projezioni sul piano II° dei medesimi punti, dei quali abbiam trovate le projezioni I, I' sul piano I°. Per la qual cosa basterà condurre due normali alla X Z pei punti I, I', una delle quali seghi la $b\,m$ in j, l' altra in j'. Saranno I — j projezioni d' un punto, I' — j' projezioni d' un altro, ambedue spettanti all' intersecazione dimandata.

Similmente opereremo per rispetto a ciascun altro piano secante; e nella figura si vede bastantemente indicato il proseguimento dell' operazione, dalla quale risultano due curve separate. Questo esempio richiamerà l' attenzione sull' avvertimento dato nel fine del §. 75.

§. 78. Non diverso, in sostanza, sarà il metodo che dobbiamo tenere se la superficie conica si muti in cilindrica.

Nulla si cangerà per quanto spetta alle sezioni fatte nella superficie sferica, e queste saran circoli determinati come prima, i quali perciò saran descritti coi centri nella K R, variamente distanti dal punto K secondo le varie posizioni del piano secante. Le rette poi che dovranno rappresentare le sezioni fatte nella superficie cilindrica, invece di concorrere nel punto m' rappresentante il vertice della superficie conica, saranno paralelle tutte fra loro, cioè inclinate alla B' O dalla medesima parte, secondo l' angolo d' inclinazione che la generatrice della superficie cilindrica formerà col piano I°.

§. 79. Descrivere l' intersecazione di un dato piano con una data superficie di rotazione.

Nel punto A sul piano I°, e nella retta $a\,a'$ sul II° sia projettato l' asse della superficie di rotazione, della quale la generatrice sia eguale, simile, e paralella alla curva $b\,b'\,b''$, che sarà la sua projezione sul piano II° §. 57. Il dato piano venga determinato dalle D L, D h, sue intersecazioni coi piani coordinati I° e II°. Per comodo della costruzione si descriva una retta P A perpendicolare in P alla D L e producasi indefinitamente. Su questa retta intendiamo elevato un Fig. 36

piano normale al piano I°, e dicasi K. L' intersecazione di questo piano K e del piano dato formerà in P colla PA un angolo che misura l'inclinazione dello stesso piano dato col piano I°. Trovata la grandezza di quest' angolo §. 34, facciasi ad esso eguale l'angolo $\pi \Pi \alpha$, e posta $\Pi \alpha$ eguale a PA, si elevi la retta $\alpha \alpha'$ normale a $\Pi \alpha$. È chiaro che la retta $\alpha \alpha'$ rappresenterà l'asse della superficie di rotazione descritto sul piano K, e la retta $\Pi \pi$ rappresenterà sul piano stesso la projezione del piano dato. Se dunque pei punti b, b', b'' ec. intendiamo condotte altrettante paralelle alla X Z che vadano ad incontrare in 1', 3', 5' ec. la $\alpha \alpha'$, facendo sopra di esse rispettivamente le $1'\beta$, $3'\beta'$, $5'\beta''$ eguali alle distanze dei punti corrispondenti b, b', b'' ec. dalla $a a'$, la curva $\beta \beta' \beta''$ che passerà pegli estremi β, β', β'' ec. rappresenterà la generatrice della superficie di rotazione, cioè la sezione fatta in essa dal piano K. Perciò nelle rette $1'\beta$, $2'\gamma$, $3'\beta'$, $4'\gamma'$, $5'\beta''$ saranno rappresentate le projezioni d'altrettanti semicircoli descritti nella superficie di rotazione, le quali projezioni s' intendano sul piano K. È manifesto che nei punti 1, 2, 3, 4, 5, dove esse rette segano la $\Pi \pi$ si rappresenteranno le projezioni de' punti ne' quali il piano dato sega le circonferenze dei circoli sopra indicati, i quali punti appartengono tutti alla sezione che si dimanda.

Resta che dimostriamo come si determini uno di tali punti, qual si voglia, e il metodo medesimo condurrà alla determinazione di tutti gli altri.

Prendiamo a determinare il punto, la cui projezione è in 2.

Si conduca la retta $2 o'$ normale in 2 alla $2'\gamma$, cioè paralella alla $\alpha \alpha'$, e col centro in 2', presa per raggio la $2'\gamma$, si descriva un circolo che seghi in o' la $2 o'$. Per lo stesso punto 2 si descriva la retta $2 m'$ normale alla $\Pi \pi$, e facciasi eguale alla $2 o'$. Dico che se saranno similmente determinati quanti altri punti si voglia m, m'', m''', m^{iv} rispetto alla $\Pi \pi$ come ora abbiamo determinato il punto m', la curva che passerà per essi esprimerà la sezione dimandata.

Imperciocchè fingiamo che il piano determinato dai tre punti $2'$, γ, o', rotando intorno alla $2'\gamma$, si ponga perpendicolare al piano della descrizione, che rappresenta il piano K. Allora il punto o' si troverà nella superficie di rotazione, e sarà projettato nel punto 2. Similmente fingiamo che il piano determinato dai tre punti Π, m', π roti intorno alla $\Pi\pi$, e pongasi normale al piano stesso della descrizione. Allora il punto m' coinciderà manifestamente con quel punto della superficie di rotazione in cui deve cadere il punto o'. Adunque ripetuto il medesimo discorso sopra tutti i punti assegnabili nella curva $m\, m'\, m''\, m'''$ ec., si conclude che se il piano dove è descritta divenga normale al piano K, per mezzo dell' accennata rotazione intorno alla $\Pi\pi$, tutta la detta curva si troverà nella superficie data, e la sua projezione sarà nella stessa $\Pi\pi$. Quella curva dunque sarà l' intersecazione del dato piano colla data superficie.

Un solo ramo $m\, m'\, m''\, m'''$ ec. della sezione si è descritto per brevità, ma è chiaro che l' intera sezione comprende un altro ramo eguale, simile, e similmente posto dalla opposta parte della $\Pi\pi$, che rappresenta l' asse della sezione medesima, §. 53.

§. 80. Se dopo aver descritto la figura della sezione, vorremo rappresentarla nella sua posizione corrispondente alla data posizione del proposto piano secante, converrà portare le misure $1\,1'$, $2\,2'$, $3\,3'$ ec. ordinatamente in AI, AII, AIII, e pei punti I, II, III, ec. condurre le rette I C, II C' III C'' ec., ordinatamente eguali alle $1\,m$, $2\,m'$, $3\,m''$ ec., le quali determineranno i punti C, C', C'' ec.; e questi apparterranno alla projezione della richiesta curva sul piano I°.

L' altra projezione sul piano II° sarà determinata conducendo per C, C', C'' ec. altrettante normali alla comune sezione X Z, che vadano a segare ordinatamente in c, c', c'' ec. le rette $1'\beta$, $2'\gamma$, $3'\beta'$ ec., prodotte quanto è mestieri come è indicato dalla figura; e verrà determinata dai punti c, c', c'' ec. la curva $c\, c'\, c''\, c'''$, che è la seconda projezione cercata.

Qui pure osserveremo che la curva C C′ C″ C‴ rappresenta un solo ramo per brevità, l'altro potendosi determinare col produrre dall'altra parte della PA le CI, C′ II, C″ III ec., e facendo ad esse eguali i loro prolungamenti.

Nel piano II° la curva è rappresentata tutta intera ne' due rami, uno continuo $c\ c'\ c''\ c'''$, e l'altro corrispondente punteggiato.

§. 81. Volendo definire il contatto fra due superficie, non declineremo dai principj coi quali fu definito il contatto fra due linee, ed anche fra una linea, e una superficie. Il criterio corrispondente a questi due casi è costituito nella coincidenza di due punti comuni ad ambe le linee, §. 23, o alla linea, e alla superficie, §. 66. Similmente stabiliremo il criterio del contatto fra due superficie nella coincidenza di tre punti comuni ad esse. Veggiam come nasca tale coincidenza.

Si taglino due superficie in una linea, ed assegnato in essa un punto il quale si chiami A, immaginiamo per questo condotta una tangente, e dicasi T. È chiaro che T sarà tangente comune all'una e all'altra superficie, §. 67; e perciò nel punto A si avvera la coincidenza di due punti. Ma ciò non basta. Fingiamo dunque condotto per A un piano perpendicolare alla tangente T, il quale produca in una delle due superficie una sezione, cui denominerò S, e nell'altra pure una sezione che si chiamerà s. Perchè le due superficie si tagliano, potranno tagliarsi pure le due linee S, s, non solo nel punto A, ma in qualche altro. Nominiamo B un punto prossimo ad A, ove si taglino le due linee S, s, e fingiamo che una delle due superficie rimanendo ferma, l'altra roti intorno alla T, che rimarrà frattanto tangente comune ad ambedue le superficie. Per mezzo dell' indicata rotazione, si potrà fare che il punto B si accosti successivamente al punto A, ed in fine coincida con esso. Allora le due linee S, s si toccheranno in A, §. 23, ed ivi determineranno la posizione della tangente ad esse comune. Avremo

dunque in A due tangenti comuni alle due superficie, e questa circostanza corrisponde a una posizione determinata che hanno reciprocamente fra loro le superficie medesime; di maniera che, rimossa l'una o l'altra da questa posizione, una delle due tangenti non potrà più esser comune. La posizione reciproca delle due superficie determinata dalle dette condizioni, si chiama *contatto;* ed avverasi in essa il criterio da noi stabilito sul principio di questo articolo; mentre pel contatto delle due linee S, *s*, cioè per esservi in A una tangente comune ad esse, avverasi la coincidenza di quel punto, che fu detto B, collo stesso punto A; e per esservi nel medesimo punto A un' altra tangente T avverasi la coincidenza d' un terzo punto col medesimo punto A. Laonde si vede che in A coincidono tre punti, i quali apparirebbero distinti, tosto che intorno ad esso punto A fosse mutata la reciproca posizione delle due superficie.

§. 82. Applicate queste considerazioni a definire il piano tangente una superficie curva, si vede ch' esso dovrà essere determinato da due rette linee, le quali tocchino nel medesimo punto la supposta superficie, e s' incontrino in quello ad angoli retti fra loro. Ma da questo medesimo principio saremo condotti a conoscere che *in qualunque modo siano fra loro inclinate due rette tangenti in un medesimo punto una superficie curva, per esse verrà sempre determinata la posizione del piano tangente in quel medesimo punto la detta superficie.*

Imperciocchè seguitiamo a nominare A il punto di contatto, e concepiamo quante linee si voglia nella data superficie descritte, le quali tutte si taglino nel punto A. Al piano tangente, che fu determinato di sopra, immaginiamo parallello un altro piano che seghi le curve accennate, e pei punti d' intersecazione s' intendano condotte altrettante rette, le quali concorrano in A. Tutte queste rette saranno inclinate sì rispetto al piano secante, e sì rispetto al piano tangente; oltrecchè ciascheduna sottenderà nella curva rispettiva un

arco intercetto dai due piani menzionati. Accostando il primo di questi al secondo, potremo nel tempo stesso accostare al punto A tutti i punti d'intersecazione tra quel primo piano e le curve; ed insieme le rette che in essi punti le segano, e concorrono in A, scemeranno l'inclinazione loro con ambedue i piani. Perciò quando coincideranno insieme i due piani medesimi, dovranno pure coincidere tutti que' punti col punto A, e stendersi nel medesimo tempo tutte quelle rette secanti nel piano tangente. Ma allora le secanti stesse divengono tangenti, §. 23; *dunque tutte le rette tangenti una superficie curva in un medesimo punto giacciono nel piano tangente in quel medesimo punto*; e perciò due di quelle rette, quali si voglia, determineranno la posizione del detto piano.

§. 83. Segue dai due §§. precedenti *che due superficie le quali si tocchino in un punto avranno comune il piano tangente in quel punto*.

§. 84. Se la superficie curva sia generata da una retta linea, la generatrice condotta per un punto dato nella superficie, sarà nel piano che la tocca in quel punto. Se poi le tangenti della superficie ne' punti assegnabili in essa generatrice siano tutte in un medesimo piano, il contatto di questo piano s'estenderà, per tutta la lunghezza di essa generatrice.

Fig. 37. §. 85. Date le projezioni P—*p* di un punto che giace in una superficie conica, il vertice della quale sia projettato in M—*m*, e la sua direttrice sia la curva AQR, la quale è ancora l'intersecazione della stessa superficie col piano I°; determinare la posizione del piano tangente questa superficie nel punto assegnato.

Condotte le rette MP, *mp* indefinite nella loro lunghezza, saran projezioni di quella generatrice, nella quale accader deve il contatto, §. 84. Sia incontrata la curva AQR nel punto Q dalla retta MP, e conduciamo la tangente QS. Questa sarà l'intersecazione del cercato piano tangente col

piano I° §. 82. È dunque determinata la posizione del piano tangente dalla retta QS, e da quella generatrice che è projettata in MQ—*mq*. Volendo ancora descrivere l' intersecazione col piano II°, conduciamo per P la retta PT paralella alla Q S sì che incontri in T la XZ. Per *p* conduciamo paralella alla stessa XZ la *pt*, e s' innalzi dal punto T la normale T*t* alla XZ, che seghi in *t* la *pt*. Nella retta condotta per S e *t* sarà la seconda intersecazione dimandata.

Imperciocchè fingiamo un piano paralello al piano I° che seghi il piano tangente passando pel dato punto. La sezione sarà una retta paralella alla QS; e perciò le sue projezioni saranno in PT—*pt*. Il suo punto d' incontro *t* col piano II° §. 32, appartiene all' intersecazione dimandata, la quale deve ancora passare per S. Dunque sarà la S *t*.

§. 86. Se invece della superficie conica sarà proposta una cilindrica, conosceremo le projezioni della retta generatrice, e invece di condurre pei punti *p*, P le rette PM, *pm* rispettive alle projezioni del punto assegnato per vertice della superficie conica, descriveremo le dette PM, *pm* paralelle alle rispettive projezioni della generatrice §. 44. Il rimanente della costruzione e della dimostrazione servirà ugualmente.

§. 87. Assegnato un punto in una data superficie di rotazione, trovare il piano che la tocca in quel punto.

Sia projettato in P sul piano I° l' asse della data superficie, e nella retta *pp'* sul piano II°, la quale formerà angoli retti colla XZ §. 57. Nella curva *a b c* sia rappresentata la sezione per l' asse che è pure la generatrice. M — *m* siano le projezioni del punto assegnato. Fig. 38

Conduciamo perpendicolare alla *pp'* la *my*, producendola in *u* a segare la generatrice *a b c*. A questa si conduca tangente la *ut* che incontri in *t* la X Z. Descritta poi la retta MP, si farà la parte PS eguale alla *p t* e la retta S D normale alla M P. In questa S D dev' essere l' intersecazione del piano I° col cercato piano tangente.

Imperciocchè immaginiamo un piano condotto per l' asse e per la M P . La sezione prodotta da questo piano nella data superficie potrà essere rappresentata dalla stessa *a b c*, nella quale il punto *u* rappresenterà il punto dato §.57. La *t u* rappresenterà poi la tangente che si conduce alla detta sezione pel punto dato . Perciò questa tangente incontrerà in S il piano I°, ed avrà la sua projezione sopra di esso nella M P . Per S dovrà dunque passare l' intersecazione del piano tangente col piano I°, giacchè la mentovata tangente è nello stesso piano tangente §. 82 .

Inoltre se pel dato punto si fa passare un piano perpendicolare all' asse , produrrà nella superficie una sezione circolare, la cui projezione sul piano II° è nella retta *u y* , prolungata quanto è mestieri .

Se per lo stesso punto dato conduciamo una tangente a quel circolo , sarà perpendicolare al piano secante che fu condotto per l'asse, ed avrà perciò la sua projezione in una retta che sia perpendicolare in M alla M P, avendo l' altra projezione sulla *u y* . Questa tangente insieme con quella che abbiam supposto condotta alla sezione per l' asse determinan il piano tangente . Esso piano sega in due rette fra loro paralelle il piano I° e quello che si conduce perpendicolare all' asse pel punto dato. L' intersecazione prodotta in questo è in quella stessa retta che intendiamo condotta tangente al circolo nato per la sezione che fa il medesimo piano nella data superficie , la qual tangente abbiam veduto che ha le sue projezioni nelle rette M N , *u y* . Adunque l' intersecazione del piano cercato col piano I° dovrà essere perpendicolare in S alla M P. Sarà dunque S D. Perchè poi *n* è il punto d' incontro fra 'l piano II° e la retta projettata in MN—*my* §. 11, l' intersecazione del piano cercato col piano II° sarà nella retta D *n* che passa per D ed *n* .

§. 88 . Data una superficie di rotazione ed un punto fuori di essa , trovare la linea di contatto fra questa superficie ed una superficie conica la quale abbia il vertice nel

pun-

punto dato ed involga la data superficie toccandola continuamente .

Se immaginiamo una serie di piani, i quali passino tutti pel dato vertice, e seghino la data superficie, nascerà una serie corrispondente di curve . Quelle tangenti che dal punto dato possono essere condotte a ciascheduna delle dette curve , saranno tutte nella superficie conica , ed i punti di contatto apparterranno alla linea che si dimanda .

Con questo primo concetto s'intende prontamente come nasca la richiesta linea di contatto, non solamente se la data superficie sia di rotazione, ma ancora se abbia qualunque altra forma ; pure non è certamente questo il più facil metodo per giugnere alla risoluzione del quesito.

È facile intendere che tutte le sezioni sarebbero diverse fra loro, e l' espediente di costruire a parte a parte ciascheduna sezione, e determinare le sue tangenti, sarebbe oltre modo laborioso , inelegante , e soggetto a molte inesattezze .

Sostituiremo dunque un'altra maniera derivata dalle seguenti considerazioni .

Se per l'asse della data superficie di rotazione conduciamo un piano, la sezione fatta nella superficie determina ancora la projezione di essa su quel piano §. 57 . Se poi sul piano medesimo vogliamo determinare la projezione della superficie conica sopra definita , basterà descrivere la projezione del vertice , e da questa projezione condurre due rette le quali tocchino e comprendano la curva predetta , la quale determina la projezione della data superficie . Nello spazio compreso dalle due tangenti sarà determinata la projezione della superficie conica §§. 57 , 42 , e i punti di contatto apparterranno alla linea che si cerca .

Ciò posto , sia projettato nel punto A, sul piano I°, l'asse della data superficie , e la corrispondente projezione sul piano II° sia la retta *aa'* normale in *a* alla XZ . Sia *m n o o'n'm'm* la sezione che fa nella data superficie un piano condotto per Fig. 39

l' asse paralellamente al piano II°, la quale sarà eguale e simile alla sezione fatta da qualunque altro piano condotto parimenti per l' asse, ed insieme determinerà sul piano stesso la projezione della detta superficie.

Ponghiamo in V — v le projezioni del vertice assegnato alla superficie conica, e sian condotte le rette ACV, AC'V' ec. pel punto A.

Ciascheduna di queste rette indicherà la posizione d'un piano condotto per l'asse a segare la superficie di rotazione, ed ogni sezione potrà essere rappresentata dalla medesima $m\,n\,o\,o'\,n'\,m'\,m$. Conduciamo per V le rette VV', VV'', VV''' ec. normali ordinatamente alle AV', AV'', AV''' ec.; ed è chiaro che la projezione del vertice sul piano che insiste sopra la AV', sarà in una retta condotta nel piano stesso, normale in V' alla AV'; la projezione del vertice sul piano insistente sopra la AV'', sarà similmente in una retta condotta in quel piano, ad angoli retti alla AV'' in V'', e così in seguito. Queste projezioni poi saranno tutte ad eguale distanza dal piano I°, cioè si troveranno tutte in un medesimo piano che passa pel dato vertice, ed è paralello al piano I°.

Adunque condotta per v una paralella alla XZ che incontri in a' l' asse, porremo $a'\,\underline{v}$ eguale ad AV, $a'\,v'$ eguale ad AV', $a'\,v''$ eguale ad AV'' ec.; e i punti $\underline{v}$, v', v'', v''' ec. rappresenteranno le projezioni del vertice considerate successivamente nei piani che insistono sopra le AV, AV', AV'', AV''' ec. Perciò le due tangenti $\underline{v}\,b$, $\underline{v}\,\beta$ rappresenteranno quelle che partono dalla projezione del vertice nel piano che insiste sopra la AV, e toccano la sezione fatta dal piano medesimo nella data superficie, e così in seguito.

Adunque i punti b, b', b'' ec., ed i loro analoghi β, β', β'' ec. rappresentano altrettanti punti della linea cercata, i quali sono determinati senza descrivere altre curve diverse dal dato contorno $m\,n\,o\,o'\,n'\,m'\,m$.

Resta solo che trasportiamo nei luoghi rispettivi le projezioni dei punti già determinati.

A questo fine condurremo pei punti b, b', b'' ec. le rette b 1, b' 2, b'' 3 ec. normali alla $a\,a'$, e si farà AC eguale ad 1 b, A C′ eguale a 2 b', A C″ eguale a 3 b'', e così di mano in mano. Non è d' uopo dimostrare che C, C′, C″, C‴ ec. saranno sul piano I° projezioni di altrettanti punti i quali spettano alla linea cercata; ed in particolare il punto C è projezione di uno nel quale la detta linea è tagliata dal piano che insiste sulla AV; il punto C′ è projezione di uno ove quella linea è tagliata dal piano insistente sopra la AV′; e similmente si dica degli altri punti determinati come sopra abbiamo accennato.

Ma il punto determinato in b, allorchè si trasferisce nella sua vera posizione sarà projettato nella retta 1 b sul piano II°, ed è inoltre projettato in C sul piano I°; dunque condotta per C una retta normale che seghi in c la 1 b, sarà c la projezione seconda corrispondente alla prima C di quel punto che abbiamo rappresentato in b. Similmente si dimostrerà che dal punto C″ condotta una normale alla XZ che vada ad incontrare in c'' la 3b'', sarà c'' la seconda projezione corrispondente alla prima C″ d' un altro punto; e nella stessa maniera si potrà determinare gli altri punti c''', c^{v} ec. corrispondenti ai punti C‴, C^{v} ec.; onde una linea che passi pei punti C, C′, C″, C‴ ec. sarà projezione sul piano I° della curva cercata, e l' altra che passi pei punti c, c', c'', c''' ec. sarà la corrispondente projezione sul piano II°.

§. 89. Se invece si dimandi la linea di contatto fra la data superficie di rotazione ed una superficie cilindrica, essendo data la direzione della sua retta generatrice, sopra i piani insistenti sulle A V, A V′, A V″ ec. descriveremo successivamente la projezione della data retta, cui dev' essere paralella la generatrice della superficie cilindrica, indi al contorno $m\,n\,o\,o'\,m'$ condurremo altrettante tangenti ordinatamente paralelle alle dette projezioni, ed i punti di contatto determineranno, come nel §. precedente, altrettanti punti della linea richiesta.

CAPITOLO VI.

Problemi.

Mi propongo in questo capitolo di dare un saggio dell' uso che possono avere i metodi delle projezioni nella geometria solida, sì elementare, come superiore.

Prendo dunque per primo argomento la relazione che ha il lato di ciascun solido regolare col diametro della sfera circoscritta ed inscritta,

§. 90. Dato il lato d' un tetraedro, trovare il raggio della sfera circoscritta ad esso.

Fig. 40 Sia AB il lato proposto. Sopra di esso descrivasi il triangolo equilatero ABC, che rappresenterà una faccia del tetraedro. Descritte le rette AD, BD, CD, le quali dividano per mezzo ordinatamente gli angoli A, B, C, concorreranno in un medesimo punto D, e i triangoli ABD, BCD, CDA, eguali fra loro, rappresenteranno le projezioni delle tre faccie rimanenti sul piano della prima ABC, cui risguarderemo come base; ed il punto D sarà projezione del vertice.

Posta DF normale a BD, col centro in B e coll' intervallo BA si descriva un circolo il quale seghi in F la DF, e descrivasi la retta BF. Questa sia divisa per mezzo in G e, prodotta la BD ad incontrare in I la AC, congiungasi la GI, la quale segherà in H la DF. Condotta la BH, dico esser questa eguale al raggio della sfera cercata.

Imperciocchè il centro di essa dovrà trovarsi nell' asse del tetraedro, cioè in quella retta che unisca il vertice colla sua projezione D. Se dunque il triangolo BDF, rotando intorno alla retta BD, come suo asse, elevisi col proprio piano in posizione normale al piano ABC, la retta DF coinciderà coll' asse, e quindi passerà pel centro della sfera circoscritta al tetraedro. Il punto F coinciderà poi col vertice; e perciò la retta FI coinciderà con quella che dal vertice medesimo si

conduce normale sopra il lato AC, la quale eguaglia la BI. Adunque il triangolo BIF è isoscele; e perciò la GI è normale alla BF, e quindi il punto H è egualmente distante dai termini B ed F.

Ma quando, per la rotazione sopraccennata, si porrà la DF normale in D al piano ABC, il punto H si troverà egualmente distante dai punti A, B, C, ed ancora dal vertice. Adunque il punto H cadrà nel centro della sfera circoscritta, e la retta BH coinciderà col suo raggio.

§. 91. La medesima costruzione determina nella HD la misura del raggio della sfera inscritta.

Imperciocchè descritte la FI e la BH, la quale producasi ad incontrare in L la FI, supponghiamo che il triangolo BFI, rotando intorno alla BI come asse, si elevi col proprio piano perpendicolare al piano ABC. Abbiam veduto che diviene così normale al piano medesimo la retta DF, e la FI coincide con quella che dal vertice si conduce normale sul lato AC; onde il piano BFI sarà perpendicolare a quella faccia del tetraedro che è projettata nel triangolo ADC, e quindi sarà la HL normale al piano della medesima faccia. Inoltre è manifesto che se dal punto H, allorchè la DF coincide coll' asse, conducasi una normale alla faccia projettata in ADB, ed una alla faccia projettata in DBC, ciascuna di queste normali eguaglierà la HL; e perciò una sfera, che abbia il centro in H ed il raggio eguale alla HL, toccherà le tre faccie concorrenti nel vertice. Ma poichè la HL, per le cose dimostrate superiormente, è eguale alla HD, e questa, nella sopradetta posizione della HF, è la normale che dal punto H cade sulla faccia ABC, ne segue che le quattro normali, le quali cadono sopra le quattro faccie dal medesimo punto H, sono tutte fra loro eguali; e perciò la sfera sopraccennata le tocca tutte; onde essa è inscritta al tetraedro.

§. 92. Sia dato, per converso, il raggio della sfera circoscritta, e dimandisi il lato del tetraedro.

Porremo la H*h* eguale al dato raggio, e condotta paralellamente a BF la *hf* che incontri in *f* la HF, sarà *hf* il lato richiesto, essendo le due H*h*, *hf* proporzionali alle due HB, BF.

In modo simile si troverà ancora il lato del tetraedro, essendo dato il raggio della sfera inscritta; perciocchè il lato cercato sarà quarto proporzionale dopo la HL, la BF, ed il raggio proposto.

§. 93. Dato il lato d' un cubo, trovare il raggio della sfera circoscritta.

Fig. 41 Propongasi il lato AB, e sopra di esso sia costruito il quadrato ABCE. Sopra una diagonale AC di questo eleviamo normale in un estremo A la retta AD eguale al dato lato AB, e si descriva la retta DC, che sarà il diametro della sfera circoscritta; e perciò la sua metà sarà il richiesto raggio.

Imperciocchè la DC sarà manifestamente eguale alla diagonale del cubo; ed è pur manifesto che il punto ove la diagonale è divisa per mezzo, si trova egualmente distante da tutti i vertici degli angoli.

§. 94. Quanto al raggio della sfera inscritta non fa mestieri dimostrare ch'esso eguaglia la metà del lato proposto.

§. 95. Nella maniera usata superiormente §. 92 si troverà il lato del cubo, essendo dato il raggio della sfera circoscritta. Imperciocchè posta C*d* eguale al doppio del raggio dato, e condotta *da* paralella alla DA, saranno proporzionali le due *ad*, C*d* alle due AD, CD.

Se poi sarà dato il raggio della sfera inscritta, il lato del cubo circoscritto ad essa sarà doppio del raggio dato.

Fig. 42 §. 96. Dato il lato AB d' un ottaedro, trovare il raggio della sfera ad esso circoscritta.

Sopra la data AB descrivasi il quadrato ABCD, del quale una diagonale AC, ovvero BD, sarà diametro della sfera circoscritta.

Imperciocchè essendo l' ottaedro contenuto da otto trian-

goli equilateri fra loro eguali, se noi consideriamo quattro di essi formanti uno degli angoli solidi, i lati opposti agli angoli piani che formano l' angolo solido, costituiscono un quadrato eguale al quadrato ABCD. Questo quadrato dividerà in due piramidi eguali e simili tutto il solido; onde le projezioni dei due vertici sul piano di quel quadrato, il quale può essere risguardato come base comune alle due piramidi, cadranno nel punto E ove si tagliano le due diagonali.

Ciò posto, i quattro triangoli ABE, BEC, CED, DEA saranno projezioni di quattro faccie spettanti ad una delle due piramidi costituite sulla base ABCD, ed insieme delle quattro spettanti all' altra piramide.

Così ne' due triangoli BCE, ECD saranno projettate le quattro faccie d' una piramide che ha il vertice in C ed è costituita sopra un quadrato, la cui projezione è nella diagonale BD. La piramide opposta a questa avrà il vertice in A; e similmente possiamo distinguere due piramidi, una col vertice in B, l' altra col vertice in D, le quali saranno costituite sopra una base comune, e questa sarà un quadrato projettato nella diagonale BD, ed eguale anch' esso ad ABCD. Tutti questi quadrati hanno dunque il centro comune nel punto E, ove è pure costituito il centro di quella sfera che passa per tutti i vertici degli angoli solidi; e quindi AE sarà il raggio dimandato.

§. 97. Date le medesime cose, si dimandi il raggio della sfera inscritta.

Pel punto E condurremo EH perpendicolare al lato BC, ed E*f* perpendicolare al lato DC, ed uguale alla EC. Descritta la *f*H, la normale EI, che si condurrà sopra di essa, sarà il cercato raggio.

Imperciocchè essendo AC projezione d' un quadrato eguale ad ABCD, del quale due vertici sono A, C §. 96, gli altri due vertici opposti, ed insieme la diagonale che li congiunge, saranno projettati nel punto E. In oltre la EH è

projezione di una retta che dal vertice sublime dell' ottaedro si conduce perpendicolare sopra il lato BC, la qual retta eguaglia la FH, rappresentandosi nel triangolo equilatero BFC la faccia dell' ottaedro, che è projettata nel triangolo BEC. Ciò posto, se facciamo rotare il triangolo EH*f* intorno alla EH, come asse, e si elevi col suo piano perpendicolare al piano ABC, il punto *f* coinciderà col vertice, e la H*f*, eguale alla HF, coinciderà colla suddetta normale. Laonde la E*i* si troverà perpendicolare alla faccia che è projettata nel triangolo BCE. Ma se immaginiamo ripetuta la medesima costruzione sopra tutte le faccie, è chiaro che la perpendicolare condotta dal punto E sopra ciascheduna di esse eguaglierà la E*i*; e perciò se col centro E e coll' intervallo E*i* sarà descritta una sfera, essa toccherà tutte le otto faccie del solido.

Si assegnerà nella faccia BFC, e similmente in ciascheduna delle altre, il punto di contatto, facendo HG eguale ad H*i*.

§. 98. Se, dato il raggio della sfera circoscritta, si dimandi il lato dell' ottaedro, lo troveremo determinando la quarta proporzionale dopo EC, DC, ed il dato raggio. Essendo dato il raggio della sfera inscritta, troveremo pure il lato richiesto determinando la quarta proporzionale dopo E*i*, BC ed il raggio dato.

§. 99. Dato il lato d' un dodecaedro, trovare il raggio della sfera ad esso circoscritta.

Fig. 43 Sul dato lato AA' si descriva il pentagono A A' A'' A''' A'^v. Condotta la sottesa AA'', trovisi il raggio della sfera circoscritta ad un cubo, il cui lato sia AA'' §. 93, e sarà quello il raggio dimandato.

Per dimostrare questa proposizione, proveremo che quel cubo e il dodecaedro debbon essere inscritti in una medesima sfera.

Il dodecaedro è contenuto da dodici pentagoni regolari, eguali fra loro; e perciò un sistema composto da sei di queste

ste faccie sarà eguale e simile al sistema composto dalle sei rimanenti. Consideriamo uno di questi sistemi, ed osserviamo prima che cinque pentagoni stanno disposti attorno del sesto a guisa di corona, essendo i lati di quello come basi dei cinque rimanenti.

Sia A A′ A″ A‴ A′ᵛ il pentagono di mezzo, e fingiamo che gli altri, rotando intorno alle loro basi, vengano a porsi nel piano del primo, sconnettendosi l'uno dall'altro. Due di questi pentagoni saranno rappresentati dai due 1 2 3 A A′, I II III A″ A′. Conduciamo le rette C 2, C II, e la terza CA′, producendola indefinitamente. Questa dividerà per mezzo l'angolo 1A′I. Ora se vogliamo ricomporre nel pristino stato il sistema de'sei pentagoni, basterà farli rotare intorno alle basi rispettive, finchè a due a due si ricongiungano ne' loro lati contigui.

Se dunque il pentagono A A′ 1 2 3 roti intorno alla sua base A A′, la projezione del punto 1 sarà sempre in una retta che da 1 sia condotta normale sulla A A′ prolungata quanto è bisogno; e similmente rotando il contiguo pentagono A′ A″ III II I intorno alla sua base A′ A″, la projezione del punto I sul medesimo piano del pentagono intermedio sarà in una retta che dal punto I sia condotta perpendicolare al lato A′ A″.

È facile provare che le due perpendicolari predette debbono scambievolmente segarsi in un punto medesimo della C A′; e posto che sia questo il punto B, sarà esso la projezione di quello ove coincidono i due punti I, 1 nello spazio; ciò vuol dire che quando i due lati A′ I, A′ 1 coincidono, la loro projezione comune sarà la retta A′ B. Ragionando similmente sulle coincidenze degli altri lati analoghi ai due A′ I, A′ 1, si vede che, descritto un circolo col centro C e coll' intervallo C B, i punti B, B^{II}, B^{IV}, B^{VI}, B^{VIII}, i quali dividono la sua circonferenza in cinque parti eguali, incominciando da B, devono essere projezioni di quei punti ne'quali coincidono gli estremi de' lati contigui, analoghi ai due

A'1, A'I. Ma quando questi due lati coincidono in una medesima retta, i due lati 2 1, II I comprendono un angolo entrante, cioè rivòlto colla sua convessità verso al piano della projezione. Adunque i vertici de' cinque angoli entranti di quella corona che si forma intorno al pentagono di mezzo, sono projettati in B, B^{II}, B^{IV}, B^{VI}, B^{VIII}.

Nell'accennata rotazione del pentagono 1 2 3 A A', il punto 2 sarà sempre projettato sulla retta C 2; e similmente nella rotazione del pentagono A' I II III A'', la projezione del punto II sarà nella retta CII. Ma quando i due lati A'I, A'1 coincidono, le due rette A 2, A'' II si troveranno paralelle, perchè ciascheduna di esse è paralella al rispettivo lato opposto, cioè la A 2 paralella al lato A' 1, e la A'' II paralella al lato A'I. Adunque le projezioni loro saranno normali alla A A'', perchè paralelle alla CB, e saranno le due rette AB^{IX}, A'' B^{I} eguali e paralelle fra loro; onde segue che la retta B^{I} B^{IX} eguaglia la A'' A, ed i punti B^{IX}, B^{I} sono i centri rispettivi dei due pentagoni.

Similmente ragionando sugli altri pentagoni, rispetto alle projezioni dei loro vertici, conchiuderemo che queste trovansi nella circonferenza d' un circolo descritto col centro C e coll' intervallo CB^{IX}, o CB^{I}, e la dividono in cinque parti eguali, incominciando dal punto B^{I}, o dall' altro B^{IX}. Tali punti saranno B^{I}, B^{III}, B^{V}, B^{VII}, B^{IX}.

Si osservi ora che per essere paralelle le A B^{IX}, A'B, così pure le $2B^{IX}$, 1B, e parimenti le A2, A'1, saranno simili i due triangoli A' B1, A B^{IX}2, e quindi eguali fra loro i lati A'B, B1, ed eguali gli angoli A B^{IX}2, A' B1, come pure le loro metà. Ma alla metà del primo è eguale l'angolo C B^{IX}B, ed alla metà del secondo è eguale l' angolo C B B^{IX}; dunque è isoscele il triangolo C B B^{IX}, e quindi tanto i punti B, B^{II}, B^{IV}, B^{VI}, B^{VIII}, quanto gli altri B^{I}, B^{III}, B^{V}, B^{VII}, B^{IX} sono nella medesima circonferenza dal centro C e dal raggio C B, o C B^{IX}. Le cinque figure A A' B B^{IX} B^{VIII}, A' A'' B^{II} B^{I} B, A'' A''' B^{IV} B^{III} B^{II}, A''' A'' B^{VI} B^{V} B^{IV}, A'' A B^{VIII} B^{VII} B^{VI}, eguali

e simili fra loro, sono projezioni di cinque pentagoni formanti la corona intorno al pentagono intermedio A A' A'' A''' A'^v.

Perchè poi sono eguali i lati projettati in B B^{IX}, B B^{I} ai lati A A', A' A'', l' uno all' altro ordinatamente, ed eguale alla A A'' si è veduto essere tanto la B^{IX} B^{I}, quanto la sua corrispondente obbiettiva, segue che l' angolo entrante projettato in B^{IX} B B^{I} eguaglia l'angolo saliente A A' A''; e quindi si conchiude che gli angoli entranti della corona sopraindicata sono eguali agli angoli salienti, l' uno all'altro.

Adunque il sistema formato dagli altri sei pentagoni, essendo eguale e simile a quello ora considerato, potrà congiungersi ad esso in modo che i cinque suoi angoli salienti si adattino agli angoli entranti del primo, e reciprocamente gli angoli salienti di questo si adattino agli angoli entranti di quello.

In questo modo appunto si chiuderà la figura del dodecaedro, e allora il pentagono intermediò del secondo sistema si troverà paralello col suo piano al pentagono intermedio del primo; e perciò la sua projezione sarà pure un pentagono eguale e simile al pentagono A A' A'' A''' A'^v; ma per l' accennata collocazione, i vertici dell' uno divideranno per mezzo gli archi sottesi dai lati dell' altro, se ad ambedue circoscrivasi un circolo.

Perciò la projezione del pentagono intermedio spettante al secondo sistema sarà rappresentata dal pentagono $aa'a''a'''a'^v$, e le figure aa' B^{I} B B^{IX}, a' a'' B^{III} B^{II} B^{I}, a'' a''' B^{V} B^{IV} B^{III}, a''' a'^v B^{VII} B^{VI} B^{V}, a'^v a B^{IX} B^{VIII} B^{VII} rappresenteranno le projezioni di cinque pentagoni che formano la corona del secondo sistema.

Congiunte ora le rette B^{VI} A, a'^v B^{IX}, B^{VI} a'^v, B^{IX}A, come pure le altre opposte B^{IV} A'', B^{I} a'', B^{IV} a'', B^{I} A'', si vede manifesto che tanto le prime quattro, quanto le quattro altre si trovano perpendicolari alle B^{IV} B^{VI}, a'^v a'', A A'', B^{IX} B^{I}, le quali sono eguali e paralelle fra loro. Adunque i punti B^{IV}, a'', A'', B^{I} sono in una medesima retta B^{IV} B^{I}; e così i

quattro B^{VI}, a'^{v}, A, B^{IX} sono pure in una medesima retta B^{VI} B^{IX}. Perciò i punti obbiettivi corrispondenti ai primi quattro sono in un piano, ed in un piano sono pure gli obbiettivi corrispondenti ai quattro secondi.

Inoltre per essere eguali fra loro le due B^{VI} a'^{v}, B^{IX} A, le quali sono projezioni di due rette, ciascheduna eguale alla A2, queste rette obbiettive saranno paralelle fra loro §§.11, 12; dunque eguali e paralelle saran pur quelle che le congiungono dalle medesime parti, le quali sono projettate rispettivamente nelle due B^{VI}A, B^{IX} a'^{v}. Adunque il quadrilatero projettato in B^{VI} a'^{v} B^{IX} A è paralellogrammo, come pure paralellogrammo è quello projettato in B^{IV} a'' B^{I} A'', opposto e simile. Dalle cose esposte superiormente si conclude che il paralellogrammo projettato in A A'' B^{I} B^{IX} è rettangolo ed equilatero, cioè quadrato. Tale è pur quello projettato in a'^{v} a'' B^{I} B^{IX}; quello projettato in A A'' B^{IV} B^{VI}; e l'altro projettato in a'' a'^{v} B^{VI} B^{IV}. Inoltre si osservi che la posizione reciproca dei due pentagoni projettati in a B^{IX} B^{VIII} B^{VII} a'^{v}, A B^{VIII} B^{VII} B^{VI} A'^{v}, è simile alla reciproca posizione dei due pentagoni rappresentati dalle loro projezioni A A' B B^{IX} B^{VIII}, A' B B^{I} B^{II} A''. Adunque la posizione reciproca delle due rette projettate in A B^{IX}, a'^{v} B^{VI} è simile alla reciproca posizione delle due projettate in A A'', B^{I} B^{IX}; e per conseguenza quadrato è pure il paralellogrammo projettato in B^{VI} a'^{v} B^{IX}A, e similmente l' altro projettato in B^{IV} a'' B^{I} A''. Laonde que' due quadrati, insieme con gli altri quattro precedentemente mostrati, racchiudono un solido che non può essere altro che un cubo, ed i vertici de' suoi otto angoli coincidono coi vertici di altrettanti angoli del dodecaedro. Adunque la sfera circoscritta al dodecaedro è circoscritta pure al detto cubo.

§. 100. La C B eguaglia la doppia normale condotta dal centro C sopra un lato del dato pentagono. Determinata la C B eguale alla CB^{IX}, sarà pure determinato il circolo B B^{I} B^{II} ec.; e quindi tutto ciò che risguarda la costruzione rimanen-

te per avere la projezione del dodecaedro si deduce dalle cose dette nel §. superiore .

§. 101 . Date le medesime cose, dimandasi il raggio della sfera inscritta .

Esponghiamo le due rette MN, NL fra loro normali, e si faccia MN eguale al raggio CA'.

Troviamo la lunghezza della diagonale d' un cubo descritto dal lato AA'', cioè il diametro della sfera ad esso cubo circoscritta §. 90 . Fatto centro in M, con intervallo eguale alla metà della diagonale predetta, descrivasi un circolo che seghi in L la NL . Dico essere NL il cercato raggio .

Non giudico necessario dimostrare che il centro della sfera circoscritta, e quello della inscritta coincidono nel medesimo punto . Non dimostrerò nemmeno che questo punto deve dividere per mezzo la retta che congiunge i centri di due faccie opposte e paralelle .

Ciò posto, potremo supporre che il centro comune alle due sfere sia projettato in C, e nella retta CA' sarà projettato un raggio della sfera circoscritta, il quale eguaglia la ML . Adunque essendo MN la lunghezza della sua projezione, sarà NL eguale alla distanza del centro dal piano AA'A'' §. 11 . La NL eguaglia dunque la perpendicolare che dal centro della sfera circoscritta si conduce sopra una faccia del dodecaedro, e quella perpendicolare è appunto il raggio dimandato.

§. 102 . Che se per converso, dato il raggio della sfera, o circoscritta, o inscritta, si dimandi il lato del dodecaedro, si determinerà col solito principio ch' esser deve, nel primo caso, il quarto termine proporzionale dopo la ML, la AA', ed il raggio dato : nel secondo caso sarà il quarto proporzionale dopo la NL, la AA' ed il dato raggio .

§. 103 . Dato il lato d' un icosaedro regolare, trovare il raggio della sfera ad esso circoscritta .

Sul lato proposto AA' descrivasi un pentagono regolare AA'A''A'''A'^v, al quale si circoscriva un circolo . In questo Fig. 44

inscrivasi un altro pentagono $a a' a'' a''' a^{iv}$, i vertici del quale dividano per mezzo gli archi sottesi dai lati del primo; e si congiungano le rette Aa, Aa', a'A', A'a'', a''A'' ec., come pur quelle che da tutti i punti A, A', A'' ec., a, a', a'' ec. concorrono al centro C. La figura che risulterà da tal costruzione sarà projezione dell' icosaedro.

Imperciocchè sui lati A A', A' A'', A'' A''', A''' A^{iv}, A^{iv} A immaginiamo costituiti altrettanti triangoli equilateri, elevati coi loro piani in modo che i vertici siano projettati in a, a', a'', a''', a^{iv}. È chiaro che questi vertici si troveranno tutti in un medesimo piano paralello al piano A A'A''; e le rette che li congiungono costituiranno un pentagono regolare eguale alla sua projezione, la quale potrà essere rappresentata dal pentagono $a a' a'' a''' a^{iv}$. Si formerà in tal guisa un sistema di dieci triangoli equilateri, eguali fra loro, i quali, insieme coi due pentagoni, racchiudono un solido. Impongasi ora a ciaschedun dei pentagoni, come base, una piramide terminata da cinque triangoli equilateri costituiti sui lati del pentagono stesso, e sarà compiuto l' icosaedro, componendosi un solido terminato da venti faccie eguali, equilatere, e triangolari.

I cinque triangoli del solido precedentemente descritto, ed insistenti sui lati del pentagono A A' A'' A''' A^{iv}, saranno projettati ne'cinque triangoli eguali Aa'A', A'a''A'', A''a'''A''', A'''a^{iv}A^{iv}, A^{iv}aA. I cinque omologhi costituiti sui lati del pentagono $a a' a'' a''' a^{iv}$ saranno projettati nei cinque aAa', a'A'a'', a''A''a''', a'''A'''a^{iv}, a^{iv}A^{iv}a. I cinque triangoli della piramide costituita sul primo pentagono saranno projettati ne'cinque A C A', A' C A'', A'' C A''', A''' C A^{iv}, A^{iv} C A. I cinque triangoli della piramide costituita sul secondo pentagono saranno projettati ne' cinque a C a', a' C a'', a'' C a''', a''' C a^{iv}, a^{iv} C a. Adunque la figura descritta contieue la projezione dell' icosaedro.

Nominiamo asse quella retta la quale congiunge due vertici opposti, come sono i due vertici delle piramidi ora con-

siderate. Egli è chiaro che il diametro della sfera circoscritta deve eguagliare l'asse predetto, e che questo è composto dalle due altezze delle piramidi anzidette, e dalla distanza dei due pentagoni, che sono le basi loro.

Io dico pertanto essere tale distanza eguale al raggio C A, e l'altezza di ciascheduna piramide essere eguale ad un lato A *a* del contorno.

Imperciocchè il raggio A C sarà projezione d'un lato della piramide accennata, cioè d'una retta eguale al lato A A'^{v} del pentagono inscritto nel circolo A A' A'' ec. Ma sappiamo che il quadrato del detto lato eguaglia il quadrato del raggio insieme con quello del lato del decagono; dunque la distanza del vertice della piramide dal piano della sua base A A' A'' A''' A'^{v} eguaglierà il lato A *a* §. 11.

Inoltre lo stesso lato A *a* è projezione d'una retta eguale alla A A'^{v}, la qual retta con un suo termine incontra in A il piano del primo pentagono, e coll'altro termine incontra il piano del secondo pentagono. La differenza fra le altezze di questi due termini, riferiti al piano del detto primo pentagono, eguaglia perciò la distanza dei due pentagoni stessi. Ma essendo A *a* lato del decagono, e la corrispondente obbiettiva lato del pentagono, inscritti nel medesimo circolo, segue che pel medesimo teorema ora citato, e pel principio stabilito nel §. 11, la detta distanza eguaglia il raggio, cioè la C A. Sarà dunque il diametro della sfera circoscritta eguale alla C A insieme col doppio della A *a*.

§. 104. Date le cose medesime, si dimanda il raggio della sfera inscritta.

Sopra al lato A A' si costruisca il triangolo equilatero A A' M, e trovisi il suo centro N. Al punto N conduciamo dal vertice M la M N, e ad essa normale la N L; indi, fatto centro in M con intervallo eguale al raggio della sfera circoscritta, descrivasi un circolo che seghi in L la N L, e sarà la N L eguale al raggio dimandato.

In fatti concepiamo che dal centro della sfera circoscrit-

ta sia condotta una normale sopra ciascheduna faccia dell' icosaedro . Tutte queste normali saranno eguali fra loro ; e quindi descrivendo una sfera che abbia comune il centro colla sfera circoscritta, ed il raggio eguale ad una delle normali predette , toccherà essa tutte le faccie .

Ora concepiamo composto l'icosaedro di venti piramidi, ciascuna delle quali abbia per base una delle faccie , e per vertice il centro della sfera circoscritta; la projezione d'una di queste piramidi sul piano della propria base sarà espressa dalla figura A A' M N , ove A A' M rappresenta la base , N rappresenta la projezione del vertice, N A , N A', N M rappresentano le projezioni dei tre lati sublimi , ciascheduno de' quali eguaglia il raggio della sfera circoscritta . Adunque essendo M L eguale al detto raggio, ed M N la sua projezione, sarà N L la distanza del vertice dalla base, cioè la perpendicolare condotta dal vertice sulla base stessa , che abbiam veduto dover essere il raggio della sfera inscritta.

§. 105. Quando sia dato il raggio della sfera circoscritta, e si cerchi il lato del solido , è chiaro che si troverà determinando la quarta proporzionale dopo la metà del diametro trovato §. 103 , la A A', ed il raggio dato .

Quando poi sia dato il raggio dalla sfera inscritta, il lato che cercasi sarà quarto proporzionale dopo la NL , la AA', ed il dato raggio .

§. 106. Data una piramide tetraedra, e scalena, trovare il centro ed il raggio della sfera ad essa circoscritta .

Si concepirà prontamente la risoluzione considerando che un piano il quale intersechi ad angoli retti un lato della piramide, e lo divida per mezzo nel punto dell' intersecazione, deve passare pel centro della sfera circoscritta .

Se dunque determineremo due piani, nei quali si avverino le condizioni predette , nella retta ove si tagliano scambievolmente , dovrà essere il centro dimandato .

Poscia scegliendo un terzo lato , che non sia nel piano dei primi due, ai quali sono rispettivamente normali i due

pia-

piani accennati, si condurrà un terzo piano che seghi questo terzo lato ad angoli retti nel suo punto di mezzo. Tutti tre i piani dovranno passare pel centro; e per conseguenza esso verrà determinato nel punto ove uno dei tre piani incontra l' intersecazione degli altri due.

Nei §.§. 39, 40, 37, abbiamo i metodi per eseguire ciascuna parte della risoluzione, in qualunque maniera s'immagini posta nello spazio la detta piramide. Ma siccome possiamo sempre fare in guisa che uno dei piani coordinati, ai quali si rifèriscono le sue projezioni, sia quello d' una sua faccia §. 60, indicherò per minuto la costruzione seguendo quest' ipotesi.

Sia pertanto ABC la base della piramide, considerata sul piano I°; D—*d* siano le projezioni del vertice; e per conseguenza AD—*ad*, BD—*bd*, CD—*cd*, saranno projezioni dei lati sublimi. Fig. 45

Pel punto H, che divide per mezzo la DB, si conduca ad essa normale la HI, la qual vada ad incontrare in I la XZ; e sarà HI projezione d' una retta la quale giaccia nel piano perpendicolare al lato rappresentato dalle projezioni BD—*bd*, e sia paralella all' intersecazione del piano stesso col piano I°. §. 39. Inoltre quella retta obbiettiva passerà pel punto che divide per mezzo il detto lato; e perciò la seconda projezione di essa passerà pel punto *h* che divide per mezzo la *bd*. Sarà dunque essa projezione nella *hi* paralella alla XZ. Perciò, elevata dal punto I la normale I*i*, ove questa segherà la *hi*, ivi l' obbiettiva considerata segherà il piano II°; e quindi pel punto *i* passerà l' intersecazione del menzionato piano col piano II°. Quest' intersecazione dovrà essere nella retta *ki* che si conduce in direzione normale alla *bd*; e quindi per *k*, ove la *ik* incontra la XZ, dovrà passare l'intersecazione di quel medesimo piano col piano I° §. 32. Adunque quest' intersecazione sarà nella retta KL normale alla direzione BD. Per la qual cosa il piano determinato dalle due rette *ki*, *k*L passerà pel centro della sfera circoscritta.

Dividiamo per mezzo due lati AB, BC, uno in F, l'altro in E, e sian condotte le FG, EG, rispettivamente normali ad essi. È manifesto che un piano eretto normale al piano I° per la EG sarà normale alla BC; e così un piano eretto normale allo stesso piano I° per la FG sarà normale alla AB. Adunque l'intersecazione di questi due piani, che sarà una retta normale al piano I°, passerà pel centro della sfera, il quale sarà costituito nell'intersecazione della retta medesima col piano determinato dalle due ki, kL.

Si elevi pel punto G, ove s'intersecan le due EG, FG, una retta G gg' normale alla XZ; e saranno G — gg' projezioni della retta menzionata, ove giace il centro.

Conduciamo poi la GL paralella, e la L l normale alla XZ; indi pel punto l la lu paralella alla ki, sì che seghi in g'' la gg'. Dico che G — g'' saranno projezioni del centro dimandato.

Imperciocchè se nel piano determinato dalle ki, kL sia descritta una retta, la cui projezione sul piano I° sia la LG, essa retta sarà paralella alla ki. Adunque la sua projezione sul piano II° sarà lg'' paralella a ki. Ma quella retta medesima projettata in L G — lg'' segherà l'altra projettata in G — gg' nel punto stesso ove quest' ultima è segata dal piano che si determina per le ki, kL; questo poi è il centro della sfera circoscritta, come fu dimostrato superiormente; dunque g'' è la projezione del detto centro sul piano II°, e G la corrispondente projezione sul piano I°.

Da ciò è manifesto che posta $g\alpha$ eguale a qual si voglia delle tre GA, GB, GC, tutte eguali fra loro, la retta $\alpha g''$ sarà eguale al raggio della sfera circoscritta.

§. 107. Data una piramide tetraedra; trovare il centro ed il raggio della sfera inscritta ad essa.

Concepiremo la risoluzione in generale, supponendo che la piramide sia posta in qualunque modo si voglia nello spazio. Un piano che passi per uno dei lati, e divida per mez-

zo l'angolo diedro formato dalle due faccie che in quel lato si congiungono, passerà pel centro della sfera inscritta.

Se dunque per tre lati della piramide, che non concorrano tutti in un medesimo vertice, siano condotti tre piani dividenti per mezzo i rispettivi angoli diedri, il punto comune di quei tre piani sarà il centro cercato. Tutte le parti di questa risoluzione possono essere eseguite coi metodi dei §§. 40, 15, 32, in qualunque caso. Ciò nulla ostante dopo questa esposizione non sarà inutile venire all' esempio d' una figura, e fingeremo, come innanzi, che la base della piramide sia nel piano I°.

Posta A B C la data base; D—*d'* le projezioni del vertice; saranno *a d'*, *b d'*, *c d'* projezioni dei lati sublimi sul piano II°; ed ometto le corrispondenti projezioni sul piano I° per semplicità maggiore nella figura. Fig. 46

Condotte dal punto D le D E, D F, D G, perpendicolari sui lati A B, B C, C A ordinatamente, si trovino gli angoli rispettivi d' inclinazione formati dalle tre faccie sublimi colla base A B C §. 40; e nominiamo ordinatamente primo, secondo, terzo, questi angoli.

Egli è chiaro che ponendo *de*, eguale a D E, *df* eguale a D F, *dg* eguale a D G, e condotte le rette *d'e*, *d'f*, *d'g*, l' angolo *d' e d* eguaglia il primo; l' angolo *d'f d* eguaglia il secondo; l' angolo *d' g d* eguaglia il terzo; e perciò, condotte le *te*, *nf*, *mg* che li dividano rispettivamente per mezzo, avremo gli angoli *ted*, *nfd*, *mgd* che sono misure delle metà dei precedenti.

Immaginiamo condotto per la A B un piano, che formi colla base A B C un angolo d' inclinazione eguale all' angolo *t e d*; per la B C un secondo piano, che formi colla stessa base, e dalla medesima parte, un angolo eguale ad *n f d*; così un terzo piano per la C A, che formi pur colla base, e dalla parte medesima, un angolo eguale all'angolo *m g d*. In questi tre piani saranno costituite tre faccie sublimi d' una seconda piramide, che ha comune con la prima la base

A B C, ed il cui vertice è nel centro della sfera inscritta.

Supponghiamo descritte nelle dette faccie della seconda piramide le tre normali ai lati della base, corrispondenti alle projezioni ED, FD, GD; e fingasi tagliata essa piramide da un piano paralello alla base, che si rappresenterà dalla retta kc', come sua projezione sul piano II°. Le rette te, fn, gm rappresenteranno le parti delle perpendicolari suddette, che sono intercette fra la base ed il piano secante; e conducendo per e, f, g tre normali alla kc' in h, k, i, sarà th eguale alla projezione che avrà sul piano I° la retta corrispondente alla te; nk eguaglierà la projezione di quella che corrisponde alla fn; ed mi eguaglierà la projezione di quella che corrisponde alla gm. Adunque pongasi E P eguale a th, F S eguale a kn, GR eguale ad mi, e pel punto P conducasi la A' B' paralella alla A B, per S la B' C' paralella alla BC, per R la C'A' paralella alla C A. Si formerà il triangolo A' B' C', che sarà projezione di quello nato per la sezione fatta nella seconda piramide dal piano projettato in kc'. Perciò i lati sublimi della detta piramide saranno rispettivamente projettati nelle rette B B', C C', A A', le quali debbono concorrere necessariamente in un medesimo punto V, che sarà projezione del vertice.

Le projezioni corrispondenti sul piano II°, dei medesimi lati, si toveranno conducendo per A', B', C' altrettante perpendicolari alla kc', che la seghino rispettivamente in a', b', c'. Le rette $a'a'$, bb', cc', prodotte quanto è mestieri, concorrer debbono in un medesimo punto v, che è la seconda projezione del centro dimandato.

Laonde si fa manifesto che la normale calata dal punto u sulla XZ sarà eguale al raggio della sfera inscritta alla proposta piramide.

§. 108. Dopo queste considerazioni seguita naturalmente che si trattino coi nostri metodi i principali problemi della trigonometria sferica. Ma per quei lettori i quali non fossero già informati dei principj di questa scienza, gioverà che

facciamo osservare la relazione costituita fra un angolo solido compreso da tre angoli piani, ed un triangolo sferico.

Immaginiamo che nel vertice d' un angolo solido triedro, qual si voglia, sia posto il centro di una sfera, e concepiamo i tre punti ove la superficie sferica è incontrata dai tre lati, o spigoli, dell' angolo solido. Se per ciascuna coppia di questi tre punti intenderemo passare un circolo massimo, nascerà un triangolo sferico formato da tre archi dei detti circoli, ciascheduno dei quali archi sarà intercetto da due dei tre punti menzionati. È chiaro che ciascun arco misura l' ampiezza dell' angolo compreso dai due lati dell' angolo solido che vengono a terminare negli estremi dell'arco stesso. Adunque a ciascheduno degli angoli piani contenenti l' angolo solido corrisponde un arco, o un lato dell' angolo sferico.

In oltre l'angolo formato da due archi, o lati, del detto triangolo si misura da quello che è compreso dalle due tangenti degli archi nel punto del loro concorso, cioè a dire nel vertice dell' angolo sferico. Ma l' angolo delle due tangenti misura l' angolo diedro formato dai due piani nei quali giacciono gli archi stessi; adunque a ciascuno degli angoli diedri formati dai piani contenenti l' angolo solido, corrisponde un angolo del triangolo sferico.

Su queste corrispondenze è fondata la traduzione che si fa dei seguenti enunciati, relativi ad un angolo solido triedro, in altri equivalenti relativi ad un triangolo sferico. Per maggior chiarezza dell' esposizione ora fatta veggasi la Fig. 52, ove C rappresenta il vertice dell' angolo solido, ACB, BCD, DCA sono gli angoli piani, AB, BD, DA gli archi corrispondenti, che formano il triangolo sferico ABD.

§. 109. Dati tre angoli piani comprendenti un angolo solido; misurare le inclinazioni scambievoli dei loro piani; e trigonometricamente „ di un triangolo sferico dati tre lati; trovare i tre angoli.

Fig. 47 Dispongo in serie continua i tre dati angoli ACB, BCD, DCE, posti col vertice tutti nel medesimo punto C.

Prese eguali fra loro le due CA, CE, descrivo la AH normale alla CB, e la EG normale alla CD, producendo queste normali a tagliarsi reciprocamente in F.

Col centro F e coll' intervallo AH descrivo un circolo, che seghi in M la CB. Col centro pure in F e coll' intervallo EG descrivo un altro circolo, che seghi in N la CD. Finalmente descritte le FM, FN; dico essere l'angolo MFH misura dell' inclinazione che avrà il piano ACB rispetto al piano BCD, quando l'angolo solido sarà formato; e così l'angolo NFG essere misura dell' inclinazione che avrà il piano ECD rispetto allo stesso BCD.

Imperciocchè facendo rotare il piano ACB intorno alla BC, come suo asse, e similmente l'altro piano ECD intorno alla CD, verranno a coincidere i due lati AC, EC in una retta medesima, la cui projezione sarà CF, essendo F projezione di quel punto nel quale coincideranno i due A, E. Allora sarà formato l'angolo solido nel punto C, e la FH sarà projezione della AH, siccome la FG sarà projezione della EG sul piano BCD. Adunque la distanza della projezione F dal punto obbiettivo corrispondente, nel quale debbono coincidere i due punti A, E, sarà eguale a un cateto d'un triangolo rettangolo, di cui l' ipotenusa eguagli la AH, l' altro cateto eguagli la FH; sarà dunque eguale ad HM, per essere quel triangolo eguale e simile al triangolo HFM §. 11. Ma l'angolo opposto al detto cateto, rappresentato da HM, misura l' inclinazione che deve avere il piano ACB rispetto al piano BCD; dunque l'angolo MFH è misura di questa inclinazione. Similmente si prova che l' angolo GFN misura l' inclinazione del piano DCE col piano BCD.

Se disporremo la costruzione in modo che uno degli angoli piani ACB, DCE si trovi in mezzo agli altri due, si troverà col metodo medesimo l' angolo d' inclinazione che formano fra loro i dati piani ACB, DCE.

§. 110. Dati due angoli piani ed un angolo diedro; trovare gli altri elementi, ovvero „ dati due lati ed un angolo d'un triangolo sferico ; trovare il lato e gli angoli rimanenti.

Questo problema può avere due casi cioè .

1°. Che il dato angolo diedro sia compreso dai piani dei due angoli dati , ovvero, che nel triangolo sferico l' angolo dato sia compreso dai due lati .

2°. Che l'angolo diedro sia opposto ad uno dei due angoli piani , ovvero , che nel triangolo sferico l' angolo dato sia opposto ad uno dei due lati .

CASO I°.

Siano ACB , BCD i due angoli piani, e preso un punto qualsivoglia A nella CA , conduciamo per esso la AH normale alla CB , producendola indefinitamente. Si ponga l'angolo fHF eguale al dato angolo diedro, e pongasi Hf eguale ad HA . Per f conduciamo fF normale in F alla AH prolungata , e si conduca CF . Con questa costruzione avremo preparato quanto è d' uopo per avere immediatamente qualunque delle tre cose che si cercano . Fig. 48

Imperciocchè si cerchi il terzo angolo piano .

Per F condurremo FG normale in G alla CD, e la Ff' normale alla stessa FG. Fatta Ff' eguale alla Ff, si descriva la f'G, e ad essa eguale facciasi il prolungamento GE della FG . Si conduca poi la CE ; e sarà DCE l' angolo cercato .

Di fatti se il piano ACB facciasi rotare intorno alla CB finchè formi col piano BCD un angolo d' inclinazione eguale all' angolo fHF , la retta HA si troverà allora projettata sul piano BCD nella retta HF §. 109 , ed il punto A nel punto F . La distanza poi del detto punto A dalla sua projezione F sarà eguale alla fF . Adunque CF sarà projezione del lato CA , il quale deve comprendere colla CG l' angolo cercato .

In oltre la GF sarà projezione d' una retta che dal punto A, projettato in F, si conduca normale alla CD. La lunghezza di questa retta dev' essere eguale alla G*f*' §.109; e quindi alla GE. Adunque CE, EG, GC sono i tre lati del triangolo projettato in CGF; e perciò l' angolo ECG è quello che si dimanda, eguagliando l' angolo opposto al lato projettato in GF.

Quanto alla ricerca dei due rimanenti angoli diedri, è chiaro che uno di essi sarà eguale all' angolo *f*'GF. L' altro si potrà trovare col metodo del §. 109, giacchè si conoscono i tre angoli piani ACB, BCD, DCE.

CASO II°.

Fig. 49 Siano ACB, BCD i due dati angoli piani, al primo dei quali debba essere opposto il dato angolo diedro.

Preso qual si voglia punto A nella CA, conduciamo per esso la AH normale alla CB, producendola ad incontrare in I la CD. Per quel punto I sia condotta la IK normale alla CD, e la IL, che formi l'angolo LIK eguale al dato angolo diedro. Conduciamo dal punto K, ove la IK incontra la CB, una retta MKL normale alla IK, che incontri in L la IL, ed in M la IHA prolungata. Per M poi s' innalzi ad essa perpendicolare la M $\mathcal{L}$, che si farà eguale alla KL. Condotta la I $\mathcal{L}$, col centro H e coll' intervallo HA si descriva un circolo, il quale incontrerà la stessa I $\mathcal{L}$ in qualche punto *f*, se pure le condizioni del problema siano possibili.

Ora si tiri per *f* la retta *f*F perpendicolare sopra la IM, e per F la FG perpendicolare alla CD; e posta F*g* eguale ad FG, si pigli la distanza *gf*, cui fatto eguale il prolungamento GE della FG, si descriverà la retta EC; e l' angolo ECD sarà il terz' angolo piano ch' era ignoto.

Imperciocchè fingiamo che il triangolo IKL, rotando col proprio piano intorno al lato IK, s' innalzi perpendicolare al piano BCD. Allora per la LI e per la CI passerà

un

un piano che formerà col piano B C D un angolo d' inclinazione eguale all' angolo L I K. In quel piano sarà dunque l' angolo cercato. Di nuovo fingiamo che il triangolo H C A descriva un cono retto intorno alla CB, come suo asse; ed è chiaro che la congiunzione del piano H C A con quello ove giace l'angolo ignoto, deve accadere in un lato del detto cono, cioè a dire nell' intersecazione di quest' ultimo piano colla superficie del detto cono. Pertanto se immaginiamo eretto un piano sopra la I H A, il quale sia perpendicolare al piano B C D, e seghi la superficie conica, la sezione sarà un circolo dal centro H e dal raggio H A. La sezione poi che farà il piano medesimo in quello dell'angolo ignoto, sarà una retta, che deve passare per I e per un punto projettato in M sullo stesso piano B C D; il qual punto sarà distante da M quant' è la lunghezza K L. Imperciocchè allora quando il triangolo I K L, rotando intorno alla I K, s' innalzi normale al piano C B D, il punto L si troverà nel piano dell' angolo ignoto; e perciò la retta, che per K si è condotta paralella alla C D, sarà projezione d'una retta che giace in quel piano, è paralella alla C D, ed incontra il piano eretto sulla IA in un punto projettato in M; onde la distanza del punto stesso dalla sua projezione M sarà eguale alla K L, ovvero alla M $\mathcal{L}$.

Adunque la retta I $\mathcal{L}$ rappresenterà l' intersecazione del piano eretto sulla I M col piano dell' angolo ignoto, mentre il circolo ff'A rappresenta l'intersecazione colla superficie conica; e quindi se il piano del detto circolo insieme colla I $\mathcal{L}$, rotando intorno alla I M, si eriga normale al piano B C D, il punto f si troverà comune alla superficie conica ed al piano dell'angolo cercato, e la sua projezione sul piano B C D sarà in F. Segue da ciò che se il triangolo HCA, rotando intorno alla C H, si rechi in tal posizione che il punto A trovisi projettato in F, allora il lato C A si troverà e nella superficie conica, e nel piano dell' angolo ignoto, e sarà projettato nella retta C F. Allora dunque

il lato C A comprenderà col lato C D l' angolo cercato.

L' altezza del punto A sopra la sua projezione F sarà manifestamente f F; la perpendicolare, che dal medesimo punto A sarà condotta sulla CD, avrà per sua projezione la F G; dunque la sua lunghezza sarà fg, ovvero EG; e quindi E C D sarà la misura dell' angolo ignoto.

I rimanenti angoli diedri ignoti si troveranno coi metodi precedenti §§. 109, 110, mentre conosciamo i tre angoli piani, ed uno degli angoli diedri.

§. 111. Ma due sono i punti f, f', ne' quali, generalmente, la retta $\mathcal{L}$ I sega il circolo ff' A; e perciò due diversi angoli solidi possono essere costruiti, che abbiano i tre elementi dati. Nell' uno il piano dell' angolo ignoto, ed il piano A C B formeranno un angolo acuto: nell' altro lo formeranno ottuso. Che se la $\mathcal{L}$ I riesca tangente, allora l'angolo compreso dai due piani predetti sarà retto.

§. 112. Dati due angoli diedri, ed uno degli angoli piani; trovare gli altri elementi, ovvero „ dati due angoli ed un lato di un triangolo sferico; trovare l' angolo ed i lati rimanenti. Questo problema ha pure due casi, cioè.

1° L' angolo piano è fra i due angoli diedri, ovvero il lato è fra i due angoli dati.

2° l' angolo piano è opposto ad uno dei due angoli diedri, ovvero il lato è opposto ad uno dei dati angoli.

CASO I°.

Fig. 50 Sia B C D il dato angolo piano; $f'gh$ sia la misura dell' angolo diedro adjacente al lato C B; e facciasi $f'hg$ eguale alla misura dell' altro angolo diedro dato, che dev' essere adjacente al lato C D. Si abbassi f' F' normale sopra gh; e per C sia condotta C m perpendicolare a C D ed eguale ad F' h, e C n perpendicolare a C B ed eguale ad F' g. Parta dal punto m una paralella alla C D, e dal punto n una paralella alla C B; e queste due paralelle si taglino in F.

Condotta la retta C F, saranno B C F, D C F projezioni rispettive degli angoli piani ignoti, dei quali potremo determinare immediatamente le grandezze reali.

In fatti, condotta la F H normale alla C D, producasi tanto che sia il prolungamento H E eguale ad $f'h$, e si descriva la retta C E. Dico esser l'angolo D C E eguale all' angolo piano ignoto che dev' essere adjacente al lato C D. Similmente condotta la F G normale alla C B, e prodotta per modo che sia G A eguale ad $f'g$, se si descriva la retta C A, questa comprenderà l' angolo A C B eguale all' altro angolo piano ignoto, adjacente alla C B.

Imperciocchè suppongasi nello spazio un punto projettato in F, e distante da F quant' è la perpendicolare f' F'. La retta che unisce quel punto col punto C sarà projettata in C F, sul piano B C D. Un piano condotto per la menzionata retta e per la C D formerà col piano B C D un angolo d'inclinazione eguale all' angolo dato $f'hg$; ed un piano condotto per quella retta medesima e per la C B, formerà un angolo d'inclinazione col piano B C D, eguale al dato angolo $f'gh$. Questi due piani formeranno dunque in C col terzo piano B C D un angolo solido determinato dalle date condizioni; e perciò i due angoli formati dall' obbiettiva della C F colle due C B, C D sono i due cercati.

Ora si osservi che essendo FH eguale ad F'h, se il triangolo E C H, rotando intorno alla C D, si rechi in tal posizione che il punto E sia projettato in F, allora la distanza di esso punto E dalla sua projezione F sarà manifestamente eguale ad f' F'. Similmente rotando il triangolo G C A intorno alla retta CB, se rechisi in tal posizione che il punto A si trovi a perpendicolo sovra il punto F, la distanza di esso punto A dalla sua projezione F sarà allora eguale alla f' F'. Adunque i due punti A, E coincideranno in un medesimo punto dello spazio projettato in F, ed insieme coincideranno le due rette C A, C E in una medesima; la qual comprenderà l' angolo E C H colla C D, e l' angolo A C G colla

CB, mentre il piano del primo angolo sarà inclinato secondo l'angolo *h*, ed il piano dell'altro angolo sarà inclinato secondo l' angolo *g*, rispetto al medesimo piano BCD,

Noti poi i tre angoli piani ACB, BCD, DCE, il terzo angolo diedro ignoto si determinerà per mezzo del §. 109; o pure, essendo noto un angolo diedro e due degli angoli piani, si troverà l' angolo diedro ignoto per mezzo del §. 110.

CASO II°.

Fig. 51 Sia BCA il dato angolo piano, *f'gh*, *f'hg* Fig.50, siano come prima le misure dei dati angoli diedri; e debba l' angolo *g* riuscire opposto all' angolo piano ACB. Sarà dunque l' angolo diedro *h* adiacente alla retta CB.

Si ponga CM normale a CB, ed eguale ad *f' h*. Per M sia condotta una retta paralella alla CB che incontri in A la CA. Per A sia condotta la AH normale alla CB, e producasi in F, tanto che sia HF eguale ad *h* F'.

Col centro in F, e coll' intervallo F'*g* descrivasi un circolo G G' G'', cui si conduca dal punto C una tangente; e sia questa la CG. Dico essere BCG uno degli angoli piani ignoti; e condotta la CF, dico essere GCF projezione dell' altro, sul piano BCG.

Imperciocchè è manifesto che HCF è projezione del triangolo ACH, quando il suo piano inclinisi al piano BCG secondo l'angolo *h*, dalla parte F. Adunque allora CF è projezione del lato CA. Ma perchè allora la distanza del punto A dalla sua projezione F eguaglia la *f'*F', Fig.50; ed in oltre si è posta GF eguale a *g*F', è chiaro che se per la CA, projettata in CF, e per la CG, sia condotto un piano, questo formerà col piano BCG un angolo diedro misurato dall' angolo *g*. Adunque l' angolo solido compreso in C dai due angoli piani ACB, BCG, e dal terzo projettato in FCG, corrisponde alle condizioni prescritte; cioè a dire, de'sei elementi che lo

compongono tre sono i dati; e per conseguenza i tre rimanenti sono quelli che si cercano.

La grandezza vera dell' angolo projettato in F C G si troverà come abbiam fatto nel §. precedente; e così essendo noti i tre angoli piani, e due angoli diedri, si determinerà nell'una, o nell'altra delle maniere insegnate, §. §. 109, 110, il terzo angolo diedro.

§. 113. Come due sono le tangenti che possiam condurre dal punto C al circolo G G′ G″, così due risoluzioni ammette in questo caso il problema, come nel precedente.

§. 114. Dati i tre angoli diedri che formansi dai tre piani contenenti un angolo solido; trovare i tre angoli piani che lo formano, ovvero „ dati i tre angoli d' un triangolo sferico; trovare i tre lati.

Preparerò la risoluzione esaminando il problema nella Fig. 52. In essa rappresentasi un angolo solido formato nel punto C da tre angoli piani A C B, B C D, D C A. Nel punto C fingesi ancora il centro d'una superficie sferica, la quale è incontrata in A, B, D dai tre lati dell' angolo solido; ed i tre archi A B, B D, D A, di circoli massimi, comprendono il triangolo sferico corrispondente al dato angolo solido §. 108. Fig. 52

Immaginando condotto per la C D un piano che divida per mezzo l' angolo diedro formato dai due piani A C D, D C B, e per la C B un altro piano che divida per mezzo l' angolo formato dai due piani D C B, B C A, l' intersecazione scambievole dei due piani immaginati sarà una retta che passerà pel vertice, o centro C; e se da un punto qualunque della medesima siano condotte tre normali, rispettivamente, ai tre piani A C B, B C D, D C A, queste saranno eguali fra loro. Rappresentiamo questo punto in M, e le tre rette M P, M Q, M R rappresentino le tre normali.

Ciò posto, fingasi condotto un piano per le due M P, M R, il quale incontri la A C in H. Questo piano sarà normale alla retta A C; e quindi condotte le due P H, R H, saranno es-

se pure normali alla retta medesima, e comprenderanno l'angolo PHR, che misura l'inclinazione dei due piani ACB, ACD. Quell' angolo è dunque uno dei dati. In simil modo condotte le due RN, QN al punto N, ove il lato BC è incontrato dal piano delle due MR, MQ, si prova essere l'angolo QNR eguale a quello che misura l'inclinazione dei due piani ACB, BCD. Finalmente se O sia quel punto dove il lato CD è incontrato dal piano delle due MQ, MP, e sian condotte la rette QO, PO; queste comprenderanno l'angolo POQ eguale all' inclinazione dei due piani BCD, DCA.

Adunque ne' quadrilateri piani PHRM, RNQM, QOPM son noti tutti gli angoli; perciocchè retti sono quelli che formansi in P, Q, R; noti quelli che formansi in H, N, O; e per conseguenza noti pur quelli che stanno intorno al punto M; cioè a dire l'angolo PMR è supplemento a due retti dell' angolo noto PHR; l'angolo RMQ è supplemento dell' angolo noto RNQ; l'angolo QMP è supplemento dell'angolo noto POQ.

Considerando ora i tre quadrilateri CHPO, COQN, CNRH, si vede che l'angolo HCN è supplemento a due retti dell' angolo HRN; l'angolo NCO è supplemento dell' angolo NQO; e l'angolo OCH è supplemento dell' angolo HPO.

Se dunque pervengasi alla cognizione degli angoli HRN, NQO, OPH, conosceremo ancora gli angoli cercati ACB, BCD, DCA.

Si osservi che essendo arbitraria la lunghezza delle MP, MQ, MR, eguali fra loro, può aversi come nota. Da essa dipendono le PH, RH eguali fra loro, le RN, QN pure eguali fra loro, le QO, PO pure fra loro eguali. Tutte queste rette saran dunque note, tosto che sia assegnata la lunghezza MP.

Colla seguente costruzione ci proponghiamo di determinare gli angoli cercati.

Si descriva col centro m, e coll'intervallo arbitrario mp, Fig. 52 il circolo $prqp'$. Intorno al centro m ponghiamo consecutivamente gli angoli pmr, rmq, qmp' eguali ordinatamente agli angoli PMR, RMQ, QMP, Fig. 52, che sono i supplementi rispettivi degli angoli diedri dati; e condotte le tangenti ph, hrn, nqo, op' pei punti p, r, q, p', si formeranno i tre quadrilateri $mphr$, $rmqn$, $qmp'o$, ordinatamente simili ai tre MPHR, RMQN, QMPO; ed ancora eguali ad essi, se la mp sia eguale alla MP. Coi tre angoli pmr, rmq, qmp' si potrà dunque formare un angolo solido eguale a quello che si forma in M, Fig. 52, dai tre angoli corrispondenti PMR, RMQ, QMP; e coi tre quadrilateri $mphr$, $rmqn$, $qmp'o$ si formerà una specie di corona triedra simile a quella che formasi dai tre quadrilateri analoghi MPHR, RMQN, QMPO.

Supponghiamo che i due quadrilateri $mphr$, $mp'oq$, rotando intorno, uno alla mr, l'altro alla mq, vengano a coincidere coi loro lati mp, mp', §. 109. Sarà formata allora l'accennata corona; e la retta ove coincidono le due mp, mp', sarà projettata nella $m\pi$, la quale passi per m e pel punto π, in cui s'incontrano due rette $p\pi$, $p'\pi$ condotte rispettivamente normali alle mr, mq dai punti p, p', §. 108.

Producasi la ph ad incontrare in x la mr, pure prodotta; e così la $p'o$ vada ad incontrare in z la mq.

Tirata per π ed x la πx, che seghi in φ la hn; e parimenti per π e z la πz, che seghi in ω la qn, saranno φ, ω le projezioni rispettive dei punti h, o, sul piano rmq, quando i tre quadrilateri, posti intorno al punto m, formano la detta corona triedra.

Imperciocchè le due $p'k$, oq debbono essere egualmente inclinate al piano rmq, in qualunqne posizione si trovi il piano $mp'z$, rotante intorno alla mz. Adunque le lunghezze delle loro projezioni saranno proporzionali alle medesime $p'k$, oq. Ma quando le due mp, mp', coincidendo

insieme, si trovano ambedue projettate nella $m\pi$, la projezione della $p'k$ è la $k\pi$; dunque allora sarà $q\omega$ projezione della qo, essendo manifestamente $k\pi$, $q\omega$ proporzionali alle pk, qo; e quindi ω sarà projezione del punto o. Similmente dimostreremo essere φ projezione del punto h.

Ora sulla rh descritto un semicircolo, ed in esso adattata la rt eguale alla $r\varphi$, sarà la retta ht, che unisce i punti h, t, eguale alla distanza che, nel predetto caso, deve avere il punto h dalla sua projezione φ, §. 108. Sarà dunque hrt misura dell' angolo che la hr comprende colla rn, cioè dell' angolo H R N, Fig. 52. Perciò trn eguaglia l' angolo A C B, che è uno dei cercati. Similmente troveremo la os, misura della distanza che deve avere il punto o dalla sua projezione ω, e l' angolo oqs eguale all' angolo O Q N, Fig. 52; onde sarà l' angolo sqn eguale all' angolo B C D.

Il terzo degli angoli cercati è supplemento di quello che corrisponde alla projezione $\omega\pi\varphi$, il quale si determinerà col metodo del §. 18, riflettendo che la distanza della projezione π dal corrispondente punto obbiettivo è determinata.

§. 115. Il fine particolare di questo saggio è di somministrare agli artisti, anche non istruiti d' altre dottrine trigonometriche, il mezzo di operare con fondamento di principj in molti casi di pratica. Ma stimo ancora che possa utilmente valere come introduzione all' uso ragionato del calcolo nella trigonometria sferica.

§. 116. Trovare i limiti fra i quali è sempre contenuta la somma dei tre angoli d' inclinazione che una retta può formare coi tre piani coordinati.

Suppongo prima una retta che passi pel punto comune ai tre piani, e cerco quando i tre angoli formino la più grande, e la più piccola somma possibile.

Una formola trigonometrica assai breve palesa tosto la risoluzione; ma volendo procedere indipendentemente dal calcolo, avrò bisogno di alcune dimostrazioni sussidiarie. Proverò con esse che, rimanendo invariato uno dei tre angoli,

li, se variino successivamente gli altri due, la loro somma sarà massima, quando ambedue siano eguali. Adunque, nel caso che tutti tre formino la massima somma possibile, converrà che, qualunque sia in questo caso la grandezza di un solo angolo, la somma degli altri due sia la più grande che formar possano, stante la supposta grandezza del terzo; e quindi i due angoli predetti saranno in tal caso eguali fra loro. Segue da ciò che, allora quando tutti tre formino la massima somma, dovranno essere tutti fra loro eguali; e perciò la retta si troverà posta rispetto ai piani coordinati, come la diagonale di un cubo è posta rispetto alle sue faccie. Coi medesimi principj dimostrerò che, posto invariabile uno dei tre angoli, la somma degli altri due varianti sarà vie minore, quanto più questi differiscano fra loro. Perciò nel caso che tutti i tre angoli formino la minor somma possibile, dovranno i due angoli varianti differire massimamente fra loro, qualunque sia la grandezza di quello che rimane invariabile. Ma ciò avviene quando uno dei due predetti angoli sia nullo; dunque il caso della menoma somma richiede che uno almeno degli angoli sia nullo, cioè che la retta giaccia in uno dei piani coordinati. In questo caso la somma dei due angoli rimanenti eguaglia sempre un retto, tanto se ciascheduno di essi abbia una grandezza, quanto se uno sia nullo.

Laonde la menoma somma eguaglia un retto, e la massima eguaglia il triplo di quell' angolo d' inclinazione che forma la diagonale del cubo con una delle sue faccie. La conclusione si applica poi a qualunque retta che non passi pel punto comune ai tre piani coordinati; giacchè per questo punto si potrà sempre condurre una paralella a qualunque retta data nello spazio, e gli angoli che ambedue formeranno con ciascun piano coordinato saranno eguali fra loro.

§. 117. Se in un segmento di circolo, minore di un semicerchio, sian contenuti due angoli fra loro eguali, ma le corde le quali comprendono uno di essi differiscano fra lo-

ro meno che le corde comprendenti l'altro, i quadrati delle corde più differenti superano, presi insieme, i quadrati delle men differenti, pure insieme presi.

Fig. 54 Nel segmento ABC, minore del semicircolo, sia contenuto l'angolo A B C dalle due corde A B, B C men differenti fra loro che le corde A D, D C, le quali comprendono un altr' angolo A D C eguale al primo. Dico che i quadrati delle A B, B C, insieme presi, son minori che quelli delle due A D, D C.

Imperciocchè si producano le due A B, A D, e sopra di esse dal punto C siano condotte le rispettive normali *ch*, *cg*; indi si ponga l'angolo C D*m*, eguale all'angolo A B D.

Il punto *m* cadrà nella retta BC, e saran simili i triangoli ABD, CD*m*, come pure fra loro simili saranno i triangoli C B*h*, C D*g*. Avremo dunque la ragione di A D ad A B eguale a quella di C*m* a C D, e perciò minore che quella di C B a C D. Ma come C B a C D, così è B*h* a D*g*; dunque la ragione di A D ad A B è minore che la ragione di B*h* a D*g*; onde segue che il rettangolo compreso dalle A D, D*g* è minore del rettangolo compreso dalle A B, B*h*.

In oltre al quadrato della AC sono eguali, tanto i quadrati delle A B, B C insieme col doppio rettangolo delle A B, B*h*, quanto i quadrati delle A D, D C insieme col doppio rettangolo delle A D, D*g*. Ma questo rettangolo fu mostrato minore che quello delle A B, B*h*; dunque i due quadrati delle A D, D C, presi insieme, sono maggiori che i due quadrati delle A B, B C, pure insieme presi.

§. 118. Pongasi una retta D E tale che i quadrati delle A D, D E, insieme presi, eguaglino i quadrati delle A B, B C, e si adatti nel segmento la retta D*e* eguale alla D E.

Fig. 55 Sarà l'arco D*e* minore dell'arco D C; e per conseguenza tutto l'arco A B*e* è minore che l'arco A B C.

§. 119. Le due rette C D, C E che formano angoli retti in C, rappresentino le intersecazioni dei due piani coordinati II° e III° col I.° §. 3. Le due rette C F, CM, e-

guali fra loro, siano projezioni sul piano I° di due rette obbiettive pure fra loro eguali; e per conseguenza egualmente inclinate al detto piano I°. Descrivasi il circolo D F M H' ec. col centro C e col raggio C F, o C M, e dai punti F, M siano condotte le F G', M N' normali alla C D, e le due FH', M O' normali alla C E, e terminate alla circonferenza. Descriviamo ancora una circonferenza P Q R ec. con raggio eguale alla lunghezza dell'obbiettiva projettata in C M, o CF, e vi si adattino contigue le P Q, QR ordinatamente eguali alle F H', F G', come pure le P*s*, *st* ordinatamente eguali alle M O', M N'.

Se le F G, F H differiscano fra loro meno che le M N, MO, ancora le FG', F H', e le loro eguali P Q, QR, differiranno fra loro meno che le MN', M O', e le loro eguali P*s*, *st*.

L' arco poi R Q P sarà minore del semicircolo, atteso che le due FH', F G', come pure le M N', M O', sono contenute in un semicircolo di raggio minore che quello con cui fu descritto il circolo P Q R ec. Adunque l' arco P Q R è maggiore dell' arco P*st* §. 118. Ma l'arco PQ misura il doppio dell' angolo d'inclinazione formato col piano III° dall'obbiettiva projettata in C F §. 13; così l' arco Q R misura il doppio dell' angolo d' inclinazione formato dall' obbiettiva medesima col piano II°. Adunque P Q R misura la doppia somma dei due angoli d'inclinazione formati dalla detta obbiettiva coi piani II° e III°.

Nello stesso modo si prova che l' arco P*st* misura la doppia somma dei due angoli d' inclinazione che forma coi piani II° e III° l' obbiettiva projettata in C M. Adunque la somma dei due primi angoli supera quella dei due secondi.

Le due projezioni C F, C M possono rappresentare due posizioni diverse di una medesima obbiettiva che sia sempre egualmente inclinata al piano I°.

Se le due F H, F G differiscono fra loro meno che le due M N, M O, il punto F è più vicino a quello che divide per mezzo il quadrante D F E, ed il punto M più lontano.

Gli angoli d' inclinazione che forma l' obbiettiva coi piani II° e III° differiscono meno fra loro quand'essa è nella posizione corrispondente a C F, che nell' altra corrispondente a C M. Adunque, supposto costante l' angolo formato col piano I°, si vede che la somma degli altri due angoli sarà maggiore quanto meno essi differiscono fra loro; e reciprocamente.

Lo stesso ragionamento si ripete supponendo costante l' angolo formato con l' uno, o con l' altro dei piani coordinati; dunque, posto costante un angolo, la somma degli altri due sarà la massima quando sono eguali, e la menoma quando uno è nullo.

§. 120. Si dimanda come la ragione dell' area d' una figura piana a quella della sua projezione, sopra un altro piano, dipenda dall' inclinazione dei due piani.

Fingiamo in primo luogo che la figura obbiettiva sia un rettangolo che abbia due lati paralelli al piano della projezione. Questa sarà pure un rettangolo; e possiamo rappre-
Fig. 56 sentarla in A B C D. Pongasi l' angolo B C B' eguale all' angolo d'inclinazione che formano insieme il piano obbiettivo, e quello della projezione. Prodotta A B finchè seghi in B' la C B', sarà C B' eguale alla lunghezza del lato projettato in C B, §. 11. Ma le projezioni A B, DC sono eguali ai corrispondenti lati obbiettivi; dunque il dato rettangolo sta alla sua projezione A B C come la C B' alla C B.

Volendo esprimerci in termini trigonometrici, la B' C si dirà seno tutto, la B B' seno dell' angolo d'inclinazione, la B C suo coseno. Perciò l' area del rettangolo obbiettivo sta all' area della sua projezione, come il seno tutto al coseno dell' angolo d' inclinazione del piano obbiettivo con quello della projezione.

Se il rettangolo obbiettivo si divida per mezzo con una diagonale, la projezione di questa, che supporremo essere A C, dividerà pure in due triangoli eguali la projezione A B C del rettangolo obbiettivo, e ciascuno dei triangoli che

lo compongono, avrà alla sua corrispondente projezione quella medesima ragione sopradetta.

Fingiamo ora che la proposta figura obbiettiva sia un triangolo rettilineo posto in qualunque modo nello spazio. Si potrà immaginare circoscritto ad esso un rettangolo, due lati del quale siano paralelli al piano della projezione.

Rappresentisi nel triangolo ABC la projezione del triangolo dato, e nel rettangolo E D C F quella del rettangolo obbiettivo circoscritto. Ciascheduno dei triangoli obbiettivi corrispondenti alle rispettive loro projezioni A D C, A B E, B C F, avrà alla propria projezione la ragione medesima che ha tutto il rettangolo obbiettivo a tutta la sua projezione, cioè quella del seno tutto al coseno dell' inclinazione. Adunque nella medesima ragione sarà pure il triangolo obbiettivo alla sua projezione A B C. Fig. 57

Che se la figura proposta sarà un poligono rettilineo, potrà essere diviso in triangoli; e la sua projezione sarà divisa anch' essa in altrettanti triangoli, i quali saranno projezioni dei corrispondenti triangoli obbiettivi. Ciascun triangolo alla propria projezione avrà la indicata ragione del seno tutto al coseno dell' inclinazione fra 'l piano obbiettivo e quello della projezione. Adunque tutta la figura obbiettiva composta dai detti triangoli sta alla sua projezione, che è composta dalle projezioni dei triangoli stessi, come il seno tutto al coseno della detta inclinazione.

Sia finalmente curvilinea la proposta figura. Potremo immaginare una serie di poligoni inscritti ad essa. A questi poligoni corrisponderanno le projezioni loro formanti una serie di poligoni inscritti nella projezione della figura obbiettiva. Siccome questa è limite dei poligoni inscritti in essa, così la sua projezione è limite dei poligoni in essa inscritti. Ma ciascuno dei poligoni obbiettivi ha alla propria projezione quella ragione che ha il seno tutto al coseno dell'inclinazione fra 'l piano obbiettivo e quello della projezione; dunque ancora la figura data, che è limite dei poligoni ad essa in-

scritti, avrà quella ragione medesima alla sua projezione, che è limite dei poligoni pure ad essa inscritti, i quali sono projezioni dei detti poligoni obbiettivi.

Perciò qualunque sia la data figura piana, essa avrà sempre alla sua projezione quella ragione che ha il seno tutto al coseno dell' angolo d' inclinazione formato dal piano obbiettivo e dal piano della projezione.

§. 121. Dal teorema precedente si deduce che se un numero A esprima l'area della figura obbiettiva, ed i numeri a, b, c esprimano ordinatamente le aree delle sue projezioni sui piani I°, II°, e III°, il quadrato del numero A eguaglia i quadrati insieme presi dei numeri a, b, c.

Immaginiamo condotta una perpendicolare dal punto comune ai tre piani coordinati sul piano della data figura.

L' angolo d' inclinazione che questa perpendicolare forma con un de' piani coordinati è complemento dell' angolo d' inclinazione che forma col piano stesso il piano obbiettivo §. 34. Adunque il coseno di quest' ultimo angolo è seno del primo. Ma fu dimostrato, §. 13, che il quadrato della retta, assunta come seno tutto, eguaglia i quadrati insieme presi dei seni delle sue inclinazioni coi piani coordinati; dunque se dimostreremo che il quadrato del numero A sta ai quadrati, insieme presi, dei numeri a, b, c, come il quadrato della detta perpendicolare ai quadrati, insieme presi, dei seni delle sue inclinazioni, sarà provata la nostra proposizione.

Pertanto nominiamo R la normale presa come seno tutto, s il seno della sua inclinazione col piano I°, s' quello della sua inclinazione col II°, s'' quello dell'inclinazione col III°.

Avremo, dunque §. 120, $A : a :: R : s$; e quindi $\overline{A}^2 : \overline{a}^2 :: \overline{R}^2 : \overline{s}^2$; e quindi $\overline{A}^2 : \overline{R}^2 :: \overline{a}^2 : \overline{s}^2$; e similmente $\overline{A}^2 : \overline{R}^2 :: \overline{b}^2 : \overline{s'}^2$; $\overline{A}^2 : \overline{R}^2 :: \overline{c}^2 : \overline{s''}^2$. Sarà perciò $\overline{a}^2 : \overline{s}^2 :: \overline{b}^2 : \overline{s'}^2 :: \overline{c}^2 : \overline{s''}^2$; dalle quali proporzioni risulta $(a^2 + b^2 + c^2) : (s^2 + s'^2 + s''^2) :: \overline{a}^2 : \overline{s}^2 :: \overline{A}^2 : \overline{R}^2$, ed $(a^2 + b^2 + c^2) : \overline{A}^2 :: (s^2 + s'^2 + s''^2) : \overline{R}^2$.

Ma i due ultimi termini di questa proporzione sono eguali, §. 13; dunque eguali pur sono i due primi.

Tocchiamo qualche argomento relativo alle intersecazioni, ed ai contatti delle superficie.

§. 122. Si dimanda se la superficie definita nel §. 46 possa essere tagliata da un piano in una retta che non sia nè una delle date direttrici, nè una delle generatrici.

Con due osservazioni giungeremo a risolvere il quesito.

In primo luogo, qualunque delle tre direttrici assumasi come asse, verrà sempre generata la medesima superficie, come segue immediatamente dal §. 46. In secondo luogo il piano rotante non può avere altri punti comuni colla superficie fuorchè quelli che sono nella generatrice determinata da esso in ogni sua posizione.

Ciò posto, se nella superficie v'abbia una retta che non sia nè una delle direttrici, nè una generatrice, la sua projezione sul piano perpendicolare all' asse non passerà per P; Fig. 23
ma, in generale, segherà alcuna delle due projezioni A B, E F. Pongasi tale intersecazione in K colla E F. Sarà dunque K projezione d'un punto unico della superficie, §. 47; e perciò dovendo trovarsi e nella retta supposta, e nella direttrice projettata in E F, questa sarà incontrata nel detto punto dalla supposta retta.

Fingiamo ora che la superficie si generi facendo girare il piano rotante intorno alla detta direttrice, come asse. È chiaro che questo piano coinciderà una volta con quello che è determinato dalla direttrice e dalla retta supposta. Allora conterrà questa retta ed ancora la generatrice, che secondo l' ipotesi non coincide con essa. Ma ciò non è possibile, come abbiamo avvertito nella seconda osservazione. Adunque in generale non potrà essere segata la superficie da un piano in una retta linea, che non sia nè una direttrice, nè una generatrice.

§. 123. Dissi, in generale, perchè ciò avverrà sempre Fig. 58
quando le projezioni A B, E F di due direttrici non siano paralelle, come si mostra nella Fig. 58, ove le due paralelle C B'', A P rappresentano le projezioni di due direttrici sul

piano I°, ed F rappresenta la projezione della terza che fa l'ufficio dell'asse. Il piano II° è supposto collocato in modo che la comune sezione X Z sia perpendicolare alle C B'', A P, §. 60; e sopra di esso, le corrispondenti projezioni delle tre direttrici sono $c\,b$, $e\,f$, $a''p$.

Fingasi un piano projettato nelle rette G G'' — $g\,g''$ indefinite, e paralelle alle AP, CB, $a\,p$, $c\,b$, il quale seghi la superficie. Dico essere la sezione una retta linea.

Imperciocchè descriviamo le projezioni A B, A' B', A'' B'' di altrettante generatrici, e le loro projezioni corrispondenti, sul piano II°, siano le $a\,b$, $a'b'$, $a''b''$. Le due parti $b\,b'$, $b'\,b''$ denotano le differenze fra le altezze dei tre punti projettati in B—b, B'—b', B''—b'', e sono proporzionali alle B B', B' B'', §. 11. Similmente le parti $a\,a'$, $a'\,a''$ denotano le differenze fra le altezze de' punti projettati in A—a, A'—a', A''—a'', e sono proporzionali alle A A', A' A''. Ma le B B', B' B'' sono proporzionali alle A A', A' A''; dunque saranno ancora in proporzione le $b\,b'$, $b'\,b''$ colle $a\,a'$, $a'\,a''$; e quindi le tre rette $a\,b$, $a'\,b'$, $a''\,b''$ passeranno per un medesimo punto h.

Segue da ciò che ancora le $g\,g'$, $g'\,g''$ sono proporzionali alle $a\,a'$, $a'\,a''$, cioè alle A A', A' A'', alle quali sono pure proporzionali le GG', G' G''; dunque le G G', G' G'', e le $g\,g'$, $g'\,g''$ sono nella medesima proporzione; e perciò i punti projettati in G—g, G'—g', G''—g'' sono in una medesima retta. Ma questi sono punti d'incontro del piano secante colle generatrici; e quello che si dice di questi punti si conclude pure per quanti altri si voglia, determinati nella maniera medesima; dunque l'intersecazione della superficie col piano projettato in G G'' è una retta.

§. 124. Tranne questo caso particolare è impossibile ciò che asserisce il Sig. Monge (Géométrie descriptive Addition II), cioè che per ogni punto della superficie considerata §§. 46, 47, passar debbano due diverse generatrici rettilinee. Non appartiene a questo luogo esaminare il metodo algebrico col quale il detto Sig. Monge intende di fare

la

la sua dimostrazione. Ma l'evidenza della nostra confirmerà la massima già inculcata dall' Autore medesimo, che i metodi grafici e quelli dell' algebra dovrebbero essere insegnati contemporaneamente, affinchè l'evidenza di quelli, e la generalità di questi componessero il massimo grado di utilità nell' istituzione dei giovani geometri.

§. 125. Si dimanda che specie di curva risulterà dall' intersecazione che si considera nel §. 73.

Immaginiamo che per l'asse della superficie cilindrica sia condotto un piano perpendicolare a quello del circolo massimo, che è base della superficie medesima, e su questo piano condotto per l'asse, intendasi descritta la projezione sì della superficie cilindrica, come della sferica.

Le due rette AF, BE rappresentino la sezione fatta dal supposto piano nella superficie cilindrica, ed il circolo ADBH sia la sezione fatta nella superficie sferica. Sarà la prima superficie projettata nello spazio indefinito che giace fra le due rette paralelle A F, B E indefinitamente prodotte, e la seconda sarà projettata nel circolo ABDH. Sia in oltre A B la sezione fatta dal predetto piano nel circolo che è base della superficie cilindrica; e per conseguenza sarà il diametro AB projezione del circolo stesso. Concepiscasi ora un piano paralello a quello sul quale intendiamo descritte queste projezioni, e secante ambedue le superficie. La sezione fatta nella sfera sarà un circolo eguale e paralello alla sua projezione; e questa sia il circolo A' D' B' concentrico all' altro ADB. La sezione fatta nella superficie cilindrica consisterà in due rette paralelle alle AF, BE, §. 44, le projezioni delle quali saranno le A'F', B'E'. Produciamo le quattro rette paralelle A F, B E, A' F', B' E' a segare le rispettive circonferenze nei punti D, H, D', H'. I due primi punti sono evidentemente comuni alle due superficie: i due rimanenti sono projezioni di due punti pure comuni ad esse. Fig. 59

Sia condotta la retta D H; e per essere eguali gli angoli DAC, HBC, saran simili i due triangoli formati dalle DH,

AB, colle AD, BH, ed inoltre saranno eguali le due BH, AD. Dunque la DH passa per C. Ma sono pure fra loro eguali le due A' D', H' B'; dunque la D H passa ancora pei punti D', H'. Perciò i punti D, H, e quelli che corrispondono alle projezioni D', H' sono in un medesimo piano, §. 10.

Similmente proveremo essere in un medesimo piano tutti gli altri punti assegnabili nell'intersecazione delle due superficie; e quindi essa è un circolo massimo, perchè è l' intersecazione della superficie sferica col piano projettato in D H.

§. 126. Se invece della sfera sarà proposta una superficie generata per la rotazione di una curva conica intorno al proprio asse; e quindi sia sostituita al circolo questa generatrice, come base della superficie cilindrica, l' intersecazione fra le due nuove superficie sarà una linea omogenea alla stessa generatrice della superficie di rotazione, cioè a dire, se questa sarà una sferoide, l' intersecazione sarà un' ellisse concentrica a quella che genera la sferoide: se sarà una conoide parabolica, l' intersecazione sarà una parabola: se sarà una conoide iperbolica, l' intersecazione sarà un' iperbole, sempre concentrica alla generatrice.

L' analisi algebrica dimostra con un solo principio queste, ed altre proposizioni analoghe, relative a superficie di qual si voglia forma. Non si giunge a conclusioni sì estese coi nostri metodi grafici; ma dai principj superiormente stabiliti, e secondo l' esempio dato nel §. precedente, si deduce con facilità la dimostrazione di quanto abbiamo ora enunciato sopra superficie generate per la rotazione di una curva conica intorno al proprio asse, come ho dimostrato altrove (*).

§. 127. Sopra una medesima base circolare o ellittica siano costituite due superficie coniche, le quali si taglino scam-

(*) Problema Grafico ec. T. XIII degli atti della Soc. Ital.

bievolmente in un' altra linea, oltre la circonferenza della base comune; si cerca qual sarà la specie di questa linea d' intersecazione.

Pel centro della base comune, e pei due vertici delle superficie coniche, immagino condotto un piano che le seghi ambedue; e rappresento in *npq* la sezione fatta in una delle due superficie, ed in *opq* la sezione fatta nell' altra, essendo *pq* il diametro nel quale vien segata la base. Immagino ancora un piano paralello alla base, e secante le due superficie coniche, come pure il piano *npqo*, che abbiamo testè condotto pei vertici e pel centro. La sezione fatta in questo piano si rappresenti dalla retta *rs*. Le sezioni delle due superficie coniche saranno due ellissi simili alla base, §. 41; e le projezioni loro sul piano della stessa base siano rappresentate dalle ellissi RZVY, TZSY, rispettivamente eguali e simili alle corrispondenti obbiettive. Fig. 60

La retta R S deve passare pei due centri delle predette ellissi, e sarà eguale alla retta *rs*. Nella medesima R S saranno poi costituiti i due diametri omologhi R V, T S, rispettivamente eguali alle *ru*, *ts*; ed i punti Z, Y, ne' quali tagliansi le due curve, saranno projezioni di altrettanti punti che spettano ad ambedue le superficie. Per uno di questi punti, cioè per Z, si conduca l' applicata Z X; e poichè sono simili fra loro le due ellissi, saranno eguali i due rettangoli, uno compreso dalle RX, XV, l'altro dalle SX, XT, perchè ciascheduno avrà al quadrato della ZX la medesima ragione (*). Adunque, producendo la ZX, dovrà necessariamente passare pel punto Y; perciocchè l'applicata corrispondente al punto X nell' una delle due ellissi deve eguagliare l' applicata omologa nell'altra; nè ciò potrà essere se la ZX prodotta incontri in punti diversi le due ellissi. Le incontrerà dunque ambedue in Y, e saranno eguali fra loro le Z X, X Y.

(*) V. Sezioni Coniche.

Dall' eguaglianza dei due predetti rettangoli si ha la proporzione RX:TX::XS:XV, d'onde proviene RT:SV::TX:XV; e dovendo le parti *rt*, *tu*, *us*, della *rs*, essere ordinatamente eguali alle parti RT, TV, VS della RS, ne segue che posta la *t x* eguale alla T X, sarà *x u* eguale ad X V. Adunque l' intersecazione di cui parliamo ha un' ordinata che passa per *x*, eguale e paralella alla Z Y, ed è in *x* divisa per mezzo.

Similmente immaginato un altro piano secante, che tagli nella retta *r' s'* il piano *n p q o*, si determinerà un altro punto *x'* dividente la *t' u'* in due parti *t' x'*, *x' u'* simili alle *tx*, *xu*; imperciocchè essendo *tx:xu::rt:us*, *t'x':x'u'::r't':u's'*; ed ancora *rt:us::r't':u's'*, avremo *tx:xu::t'x':x'u'*.

Dunque i punti *x*, *x'*, e tutti gli altri similmente determinati, giacciono in una medesima retta che passa per ↓, dove si tagliano le *n q*, *o p*. Ma pel punto *x'* passar deve un'ordinata paralella alla precedente, ed ivi essere divisa per mezzo; dunque le ordinate che passano pei punti *x*, *x'* ec. sono costituite in un medesimo piano, e divise per mezzo dai punti stessi.

Per la qual cosa l' intersecazione di cui si tratta giace in un piano, e la retta *x* ↓ è suo diametro.

Quella curva è dunque una delle tre sezioni coniche dette dai Geometri *di second' ordine*. La specie particolare sarà poi determinata dalla posizione scambievole delle due rette *np*, *oq*.

§. 128. Qualunque sia la distanza di ciascun vertice dalla base, sussiste la nostra dimostrazione. Adunque varrà ancora nel caso che i vertici si scostino a distanza infinita dalla base, cioè quando le due superficie coniche si trasformino in cilindriche, o ancora quando, una rimanendo conica, l' altra divenga cilindrica.

§. 129. Non solamente la medesima dimostrazione, §. 127, conviene ancora se la base proposta sia circolare; ma si applica egualmente, e conduce alla conclusione medesima se

quella base sia iperbolica, o parabolica. Adunque *se la base comune delle due superficie sopraddette è una linea di second' ordine, ancora l' altra curva d' intersecazione sarà una linea di second' ordine*.

§. 130. Data una sferoide, ed un punto fuori di essa, nel quale sia costituito il vertice d'una superficie conica involvente e tangente la superficie sferoidica, si dimanda di che specie sarà la linea di contatto fra le due superficie.

Premetto come principj dimostrati.

1.° Che la sezione fatta da un piano nella sferoide è generalmente un' ellisse, la quale diviene un circolo quando il piano secante è perpendicolare all' asse, e diviene la stessa ellisse generatrice della sferoide quando il piano secante passa per l' asse, §. 53.

2.° Se la sferoide sia tagliata da una serie di piani paralelli fra loro, le sezioni sono tutte simili, hanno i centri in una medesima retta, ed i diametri omologhi fra loro paralelli.

3.° Quindi si deduce che due, quali si voglia, fra le sezioni predette possono essere considerate come giacenti in una medesima superficie conica, la cui base sia l'una, o l'altra delle due sezioni medesime, ed il cui vertice sia nel punto ove si tagliano la retta condotta pei centri, e quella che passa pegli estremi di due diametri omologhi.

Ciò posto, concepiamo condotto un piano pel punto dato, e per l' asse della data sferoide. La sezione sarà la stessa ellisse generatrice rappresentata in M N *n m*, e P potrà rappresentare il dato punto. Fig. 61

Siano condotte per P le due tangenti P M, P N, in M ed N, e descrivasi la corda M N, come pure un' altra *m n* paralella ad essa. Divisa per mezzo in C la M N, ed in *c* la m *n*, sia condotta la retta indefinita C*c*; e supponghiamo tirate due secanti, una pei punti M, *m*, l' altra pei punti N, *n*. Egli è manifesto che le dette secanti si devono incontrare in un punto della retta C *c*, prodotta indefinitamente; e ciò averrà sempre, qualunque sia la distanza fra

le due corde M N, *m n*. Adunque, se fingiamo che una retta *m n*, conservandosi paralella alla M N si mova continuamente verso di essa, e termini sempre da ambe le parti nella curva, le secanti che passano pei punti omologhi M, *m*, N, *n*, concorreranno sempre in un punto della stessa retta C*c* prolungata. Ma quando la *m n* coinciderà colla M N, i punti *m*, *n* coincideranno ordinatamente coi punti omologhi M, N; e perciò le due secanti diverranno tangenti, §. 22. Adunque l' una di esse coinciderà colla M P, l' altra colla N P. Ma il punto del loro concorso non uscirà dalla retta C *c*; dunque essa deve passare per P.

Ora supponghiamo projettata la sferoide nella ellisse M N *m n*, §.53; e le due corde M N, *m n* siano projezioni di due sezioni piane fatte nella superficie di essa. Le due sezioni saranno in una superficie conica, la quale ha il vertice nel punto della retta C P ove concorrono le due secanti condotte, una per M, *m*, l' altra per N, *n*, e della quale ciascun lato sega la superficie sferoidica. Progredendo il piano *m n* verso il piano M N, la detta superficie conica trasporterà il suo vertice di mano in mano più vicino al punto P, e finalmente quando il piano *m n* cadrà sul piano M N, le due sezioni coincideranno, e tutti i lati della superficie conica, che prima segavano la superficie sferoidica, diverranno tangenti, senza che il loro punto comune, cioè il vertice, cessi di trovarsi nella retta C P. Allora questo punto sarà dunque determinato da una sola, qual si voglia, delle tangenti predette, che seghi la retta C P; dunque sarà lo stesso punto P, ove ciascheduna delle tangenti M P, *m* P incontra la C P.

Per la qual cosa una superficie conica che abbia il vertice in P e la base, o direttrice, nella sezione projettata in M N, ha tutti i suoi lati tangenti la superficie sferoidica nella sezione medesima. La superficie conica involve dunque la sferoidica, e la tocca nell' ellisse che è projettata in MN.

§. 131. Estendendo il problema a qualunque superficie

nata per la rotazione di una linea di second' ordine intorno al proprio asse, discopresi coi medesimi principj che la linea di contatto è sempre una linea di second'ordine; e specialmente è un circolo se il vertice sia dato nella direzione dell' asse; e in tutti gli altri casi un' ellisse, di cui sarà tanto maggiore l' asse principale, quanto meno divergano le due tangenti, che dal vertice dato si conducono alla sezione fatta nella superficie da un piano che passi pel detto vertice, e per l' asse.

§. 132. Per la dimostrazione ora esposta è indifferente che la distanza sia definita tra 'l dato vertice ed il centro, o qualunque altro punto della data superficie di rotazione. Sarà dunque lecito conchiudere che la detta dimostrazione ha luogo ancora quando quella distanza pongasi infinita, cioè la superficie conica divenga cilindrica.

Perciò *la linea di contatto fra una superficie generata per la rotazione d' una linea di second' ordine intorno al proprio asse, ed una superficie conica, o cilindrica, che la involga e tocchi, sarà sempre una curva di second' ordine*. Ma si troverà che la superficie involvente e tangente essendo cilindrica, la linea di contatto, è un' ellisse, o un circolo nella sferoide, una parabola nella conoide parabolica, un' iperbole nella conoide iperbolica. (*)

§. 133. Data una superficie che possa essere generata da una retta linea; condurre ad essa un piano tangente che passi per un punto dato.

Pel dato punto si farà passare un piano paralello ad uno dei piani coordinati, e sarà determinata l' intersecazione di esso piano paralello colla data superficie, §§. 42, 44 e seg. Se per quel punto medesimo sarà condotta alla detta intersecazione una tangente, il piano richiesto verrà determinato da essa tangente e dalla generatrice che passa pel

(*) V. Opusc. cit. Problema Grafico ec.

punto di contatto §. 84. Secondo le circostanze particolari dei problemi, potremo indurre alcune modificazioni in cotesto metodo generale. Se la superficie data sia conica, ed abbiavi descritta in un de' piani coordinati la sua intersecazione con esso, §. 42, si condurrà una retta che passi pel vertice e pel punto dato, producendola ad incontrare quel piano. Pel punto d' incontro tirata una retta che sia tangente l' intersecazione del piano colla superficie, in essa retta sarà l'intersecazione del piano medesimo con quello che si cerca, il quale passerà e per l'accenata tangente, e per la generatrice che passa pel punto di contatto; e quindi ancora per la retta determinata dal vertice e dal punto dato; onde potremo determinare l' intersecazione del piano richiesto con qualunque dei due rimanenti piani coordinati, seguendo l' insegnamento del §. 32.

Che se la data superficie sarà cilindrica, allora è chiaro che dovremo condurre pel punto dato una retta paralella alla generatrice, e determinato il suo punto d' incontro col piano coordinato, ove è descritta l' intersecazione della superficie, ciò che rimane a compiere la costruzione, procederà come nel caso precedente.

Ma di qualunque specie sia la data superficie, tanti saranno i piani che soddisfanno alle prescritte condizioni, quante le tangenti che dal punto dato possono essere condotte alla data superficie.

§. 134. Per due punti dati fuori d' una superficie curva, la quale non possa essere generata da una linea retta, far passare un piano che tocchi la data superficie.

In ciascheduno dei dati punti si costituisca il vertice d' una superficie conica involvente e tangente la superficie data. Determinate le due linee di contatto, §. 88, saranno pure determinati i punti comuni ad esse, §. 12.

Per ciascheduno di questi punti, e pei due dati, passerà un piano tangente la data superficie, perchè toccherà ambedue le superficie coniche, §§. 82, 85. Dalla natura della data su-

per-

perficie dipende dunque il numero de' piani che possono soddisfare al quesito. Se quella superficie sia generata per la rotazione di una curva conica intorno al proprio asse, è manifesto, §. 131, che le due linee di contatto, segandosi generalmente in due punti, due sono i piani tangenti che passano pei due punti proposti.

§. 135. Sia data un' ellisse ABC, ovvero un cerchio, e si assegni entro lo spazio ellittico, o circolare, un punto O qual si voglia, pel quale siano condotte le corde Aa, Bb, Cc, e quante altre ci piaccia. Pegli estremi di ciascheduna corda sian condotte due tangenti, le quali scambievolmente s' incontrino, come avviene nei punti α, β, γ. Cercasi di che specie sarà la linea che passa per que' punti, e per tutti gli altri che possono essere determinati nella medesima maniera. Fig. 62

Intenderemo che, per la rotazione della proposta ellisse intorno al proprio asse, si generi una superficie sferoidica, la quale sarà projettata nella stessa ellisse generatrice ABC, sul piano della medesima, §. 53.

In O sarà projettata una retta normale al piano predetto, e terminata da ambe le parti nella superficie sferoidica. Nelle corde poi A a, B b, C c saran projettate altrettante sezioni piane della detta superficie. Immaginiamo che ciascheduna di queste sezioni sia base d'una superficie conica involvente e tangente la superficie sferoidica. Ciascheduna di queste superficie coniche avrà un lato che passerà per un punto della superficie sferoidica, projettato in O; e questi lati saranno altrettante tangenti della superficie stessa nel medesimo punto, §. 88. Adunque saranno tutte costituite in un piano che tocca la superficie sferoidica in quel punto, e tocca ad un tempo tutte le superficie coniche, §§. 82, 85. Passa dunque tal piano per tutti i vertici, §. 85. Ma i vertici sono nei punti α, β, γ, §. 130. Adunque debbono trovarsi tanto nel piano A B C, quanto nel piano tangente, cioè nell' intersecazione di questi due piani, che è una retta.

§. 135. Facciasi il medesimo ragionamento sostituendo al circolo, o all'ellisse, qual si voglia delle altre due curve di second' ordine, e si arriverà alla medesima conclusione. Adunque, in generale, *se quante corde si voglia di una curva di second' ordine si taglino scambievolmente in un punto comune, e pegli estremi di ciascuna corda sian condotte le rispettive tangenti, le quali s' incontrino, tutti i punti d'incontro saranno in una medesima retta*.

§. 136. Siano proposte due superficie curve, non generabili da una retta linea, e sia dato inoltre un punto fuori di esse; si vuol determinare un piano che passi per quel punto, e tocchi ambedue le date superficie.

Nel punto dato si costituisca il vertice comune a due superficie coniche, ciascheduna delle quali involga e tocchi una delle superficie date, §. 88. Un piano che tocchi ambedue le superficie coniche, dovrà toccare ancora ambedue le superficie date, §. 82. Se dunque si descrivano le intersecazioni delle due superficie coniche con uno dei piani coordinati, o con qualunque altro piano, e si determini una retta che sia tangente comune alle due intersecazioni; il piano che passerà per questa tangente e pel punto dato, toccherà le due superficie coniche, §. 85; e per conseguenza ancora le due proposte.

§. 137. Tanti saranno i piani tangenti quante le tangenti comuni alle due intersecazioni sopra indicate, §. 136. Adunque se le due superficie siano generate dalla rotazione di una linea di second'ordine, i piani tangenti, che possono soddisfare al quesito, saranno quattro, in generale.

Imperciocchè supponghiamo condotto pel punto dato un piano che seghi ambedue le superficie; ed è chiaro che un piano potrà toccare ambedue le superficie coniche da una medesima parte per rispetto al piano secante, ed un altro piano potrà toccarle dalla parte opposta alla prima. In oltre un terzo piano potrà toccare una delle dette superficie da una parte, e l' altra dalla parte opposta, rispetto al piano se-

cante ; e allora si dice che il piano tangente le tocca alternamente . Un altro piano tangente si potrà poi condurre in senso opposto al precedente , e quest' ultimo sarà il quarto che potrà soddisfare . Si avrà un esempio più facile da concepire, immaginando che le due superficie siano sferiche, o sferoidiche .

§. 138. Date tre superficie curve , non generabili da una retta linea; si vuol determinare un piano che le tocchi tutte tre .

Nominiamo S, S', S'' le date superficie, ed immaginiamo generarsi da tre rette tre superficie, ciascheduna delle quali involga e tocchi due delle date . Si concepirà la formazione di queste superficie involventi, fingendo un sistema di piani che seghino due delle date superficie con una data legge; a cagione d' esempio , passando tutti per una medesima retta data , seghino le due superficie S , S' . In ciascun piano intendiamo condotte due tangenti comuni alle due sezioni , che le comprendano nell' angolo formato da esse , ovvero comprendano una sezione nel detto angolo, e l'altra sezione nell' angolo opposto formato dai loro prolungamenti . Nel primo caso si dirà che ciascuna tangente tocca dalle medesime parti per rispetto al punto in cui concorrono ambedue ; e nel secondo caso si dirà che ciascuna tocca alternamente .

Tutte le tangenti dalle medesime parti appartengono ad una superficie involvente e tangente ambedue le superficie S , S' dalle medesime parti. Tutte le tangenti alterne appartengono ad una superficie del pari involvente e tangente le due medesime S , S' , ma alternamente . Ciascuna delle accennate tangenti può essere considerata come generatrice della rispettiva superficie. Quello che si è detto intorno alla superficie che involge e tocca le due S, S', dicasi d' un' altra che involga e tocchi le due S, S'', e d'una terza che pure involga e tocchi le due S', S''.

Concepite così due delle tre superficie involventi , per esempio quella che comprende le due superficie date S, S',

e quella che comprende le due S, S″ dalle medesime parti, è chiaro che nella S verranno determinate le due diverse linee di contatto colle diverse superficie involventi. Queste due linee segandosi, determineranno alcuni punti, per ciascheduno dei quali passerà e la generatrice dell'una superficie involvente, e la generatrice dell'altra. Il piano poi, che è determinato dalle due generatrici, toccherà ambedue le superficie involventi; e per conseguenza tutte tre le superficie date.

Quanti saranno i punti ne' quali si taglino le due menzionate linee di contatto, tanti saranno i piani tangenti che potremo condurre. Dicasi *a* il numero di questi piani.

Ora immaginiamo che sussista la prima superficie involvente le due S, S′; ma la seconda si cangi in quella che tocca alternamente le due S, S″. Si formerà sulla S una nuova linea di contatto con questa superficie involvente, e nasceranno quindi nuovi punti d'intersecazione colla prima linea di contatto. Per questi punti ancora passeranno altrettanti piani tangenti le tre superficie date, giacchè per ciascheduno di essi passa una generatrice della prima superficie che involge e tocca dalle medesime parti le due S, S′, ed una generatrice dell'altra superficie che involge e tocca alternamente le due S, S″. Chiamisi *b* il numero di questi nuovi piani tangenti.

Di nuovo sussista la superficie involvente ora indicata, ed immaginiamo quella che involge e tocca dalle medesime parti le due S′, S″. Nascerà sulla S″ una linea di contatto colla superficie che involge e tocca alternamente le due S, S″, ed una linea di contatto colla superficie che involge e tocca dalle medesime parti le due S″, S′. Pei punti ne'quali si tagliano queste due linee di contatto verranno determinati, come prima, altrettanti nuovi piani tangenti, il numero de' quali si potrà nominare *c*.

Così proseguendo si conoscerà la moltitudine risultante dai numeri *a*, *b*, *c*, ec.; e tale sarà la moltitudine dei piani soddisfacenti al quesito.

Prendiamo ad esempio tre sfere, e siano projettate nel piano de' loro centri; onde verranno rappresentate dai circoli massimi corrispondenti s, s', s''.

Le tangenti dalle medesime parti i due primi circoli s, s' concorrano in m; le alterne si taglino in M. Così le tangenti dalle medesime parti i circoli s'', s' concorrano in m'; e le alterne si taglino in M'. Finalmente le due tangenti dalle medesime parti i circoli s'', s concorrano in m''; e le alterne in M''. Fig. 63

Le superficie che involgono e toccano, a due, a due, le date sfere, sono superficie coniche, rette, a base circolare, che hanno i loro vertici rispettivi in m, m', m'', M, M', M'', tutti nel piano dei centri; e le linee di contatto son tutti circoli, coi loro piani perpendicolari al piano dei centri.

Di questi circoli combinando, a due, a due, quelli che sono in una medesima superficie sferica, si vede che non possono tagliarsi che in due punti, uno da una parte del piano dei centri, ed un altro dalla parte opposta. Adunque un piano può toccarli ambedue da una parte, ed un altro dalla parte opposta.

Laonde un solo piano può toccare tutte tre le date sfere da una medesima parte del piano dei centri, ed un altro piano può toccarle tutte dalla parte opposta.

Ma facendosi a considerare, in ciascheduna delle superficie sferiche, i punti d' intersecazione fra un circolo di contatto con una superficie che involge e tocca due sfere dalle medesime parti, ed il circolo di contatto con un'altra che ne involge e tocca due alternamente, si vede che per ciascun vertice M, M', M'' posson essere condotti due piani, ciascun de' quali tocchi dalle medesime parti due sfere, e due ne tocchi alternamente.

Perciò sei piani soddisfanno al problema, ciascuno toccando alternamente due sfere, e due dalle medesime parti; i due altri piani soddisfanno essi pure toccando da una mede-

sima parte le tre sfere; onde in somma, i piani soddisfacenti al quesito sono otto.

Si osservi che i due piani ultimamente indicati dovendo passare pei tre vertici dei coni che toccano dalle medesime parti le sfere a due a due, questi vertici saranno nell' intersecazione dei due piani predetti. Adunque i punti m, m', m'' sono in una medesima retta.

Non altrimenti due piani che tocchino due sfere dalle medesime parti, e due alternamente, dovendo passare pei vertici rispettivi de' coni tangenti, ne segue che due dei tre vertici M, M', M'' sono in una medesima retta con uno degli altri m, m', m''.

CAPITOLO VII.°

Dei circoli osculatori, delle Evolute, e delle Evolventi.

Fig. 64 §. 139. In una curva piana Q P P' P'' ec. sia dato un punto P, dal quale parta la tangente T P, e la normale P K, indefinite. Preso nella curva medesima un altro punto L, si potrà descrivere un circolo che passi per P ed L, avendo il centro nella normale P K. Si potrà concepire inoltre che il detto circolo muti continuamente la sua grandezza per modo, che il punto L, dove si tagliano scambievolmente la circonferenza circolare, e la data curva, s' accosti di mano in mano al punto P, fino a tanto che coincida con esso. Quel circolo il quale corrisponde a tal condizione si chiama *circolo osculatore* della proposta curva nel dato punto P, come il suo raggio ed il suo centro chiamansi *raggio*, e *centro d' osculo*.

Coll' avvicinarsi del punto L al punto P s' accorda il crescere, o lo scemare continuo, del circolo variante. Quand' esso diventa osculatore nel primo caso, toccherà la data curva esteriormente, cioè l' arco circolare passerà dentro l' angolo

mistilineo formato nel supposto punto P dalla curva colla sua tangente. Nel secondo caso la circonferenza osculatrice toccherà la curva interiormente, cioè questa passerà entro l'angolo mistilineo che forma colla tangente la detta circonferenza. Nel primo caso dunque l' angolo curvilineo che la circonferenza osculatrice forma in P colla data curva, è minore dell' angolo che ivi forma colla circonferenza medesima qualunque altra di quelle che toccano la curva interiormente; nel secondo caso poi l' angolo curvilineo formato in P dalla curva e dalla circonferenza osculatrice è minore dell' angolo che ivi forma colla medesima circonferenza qualunque altra di quelle che toccano la curva esteriormente. Quindi segue che niuna circonferenza di circolo, tangente la curva in P, potrà passare entro l' angolo curvilineo ivi formato dalla curva colla circonferenza del circolo osculatore; e perciò *questo circolo sarà sempre o il massimo tra quelli che toccano interiormente la curva, o il minimo fra tutti quelli che la toccano esteriormente*.

§. 140. Attesa l' accennata prossimità della curva e della circonferenza osculatrice, fu ammessa fra i Geometri quella sentenza, *che un arco menomo della curva quasi coincide coll' arco menomo corrispondente del circolo osculatore*, o che *uno di tali archi può essere preso in iscambio dell' altro*: espressioni adottate per amore di brevità, ma che non possono adeguatamente corrispondere a ciò che si vuole significare.

Similmente per indicare che la curva, nel dato punto P, si accosta alla forma della circonferenza osculatrice più che a quella di qualunque altra, che la tocchi nel punto medesimo, si suol dire che la curvatura della detta curva in quel punto eguaglia la curvatura del circolo osculatore: e perciò chiamasi *centro*, *e raggio di curvatura* il centro, ed il raggio d' osculo.

§. 141. Sia proposta una curva piana G K K′ K″, ec., alla quale si assetti un filo, fermo con un suo capo in qual

si voglia punto K″ della curva stessa, e prolungato in retta linea oltre al termine K dell' arco a cui si assetta, giunga coll' altro capo in un punto P fuori della curva. Se, rimanendo invariabile la lunghezza del filo, conducasi l' estremo P con moto continuo in P′, P″ ec., il detto punto P, che rappresenta l' estremo mobile del filo, descriverà una curva P P′ P″ ec., la qual si chiama *evolvente* per rispetto alla data K K′ K″ ec., cui s' attribuisce il nome correlativo di *evoluta*.

Egli è manifesto, §. 22, che le parti rettilinee del filo P K, P′ K′, P″ K″ ec. saranno tangenti la menzionata evoluta ne' rispettivi punti K, K′, K″ ec.; ed in oltre che la differenza fra le PK P′K′, eguaglierà l'arco KK′ dell'evoluta da esse intercetto; così la differenza tra le P′ K′, P″ K″ eguaglierà l' arco K′ K″, ec.

Sia prodotta la P K ad incontrare in O la P′ K′; e col centro K, e coll' intervallo K P, sia descritto un arco di circolo P*p*, quanto breve si voglia, ed un altro P*n* sia descritto col centro O, e coll' intervallo O P. Inoltre pel punto *p* s' intenda condotta una tangente *p i* all' evoluta in *i*, e si congiungano i punti K, *i* con una retta K *i*.

Da quanto abbiamo già osservato si conclude che, fatta la lunghezza *i m* eguale alla retta P K insieme coll' arco K *i*, sarà *m* nella curva evolvente P P′ P″ ec. Essendo poi la corda K *i* minore dell' arco ad essa corrispondente, sarà la retta *i m* maggiore delle due P K, K *i* insieme prese, cioè delle due *p* K, K *i*, le quali superano la *p i*; dunque sarà *i m* maggiore di *p i*; e quindi l' arco circolare P *p* è interiore per rispetto all' evolvente.

Ora essendo le due rette K O, O K′, insieme prese, maggiori dell' arco K K′, saranno le due P O, O K′, prese insieme, maggiori della P K insieme coll' arco K K′, cioè maggiori della retta K′ P′; e quindi, tolta la parte comune O K′, rimarrà P O maggiore di O P′, cioè a dire O*n* maggiore di O P′; onde il punto *n*, per quanto riesca vicino al punto P, sarà sempre esteriore per rispetto alla curva evolvente P P′ P″ ec.

ec. Per conseguenza esteriore sarà pure l'arco circolare P *n*. Si dimostra poi facilmente, §. 22, che posta la P T normale in P alla P K, come è tangente comune ai due archi circolari P *n*, P *p*, così tocca pure la data curva evolvente nel medesimo punto P.

Ma accostandosi il punto O al punto K, ancora il circolo dal centro O, e dal raggio O P, si accosta al circolo descritto col centro K, e col raggio K P, il quale fu dimostrato interiore; dunque esso è limite di tutti i circoli descritti col centro variante O, e col raggio pure variante OP, i quali furono dimostrati esterni. Per la qual cosa il detto circolo dal centro K, e dal raggio K P è *osculatore* in P; K è dunque *il centro d' osculo* relativo al punto P dell' evolvente P P' P'' ec., e K P è il corrispondente *raggio*.

Nel modo stesso dimostrasi che ogni punto dell'evoluta è un centro d' osculo per rispetto all'evolvente; onde segue che la tangente dell'evoluta, intercetta fra 'l punto di contatto e l'evolvente, è il raggio osculatore corrispondente al punto del suo incontro coll' evolvente medesima, ed è sempre ad essa normale.

Dunque *tutte le normali dell'evolvente toccano l' evoluta, ed i punti di contatto sono i relativi centri d' osculo*.

§. 142. Se dunque una curva piana qualsivoglia sia considerata come un' evolvente, la sua evoluta nel piano medesimo verrà determinata dalle normali della detta evolvente, alle quali tutte dev' essere tangente la cercata evoluta; ovvero questa sarà generata dal movimento di un centro d' osculo, come a cagione d' esempio K, il quale scorra per le posizioni di tutti gli altri centri d' osculo consecutivi, spettanti alla data evolvente P P' P'' ec.

Da ciò si manifesta un metodo facile per costruire meccanicamente l' evoluta d'una data curva piana. In fatti conduciamo alquante normali alla proposta evolvente, producendole a segarsi consecutivamente. Esse formeranno un contorno rettilineo, a tutti i lati del quale dev' essere tan-

gente l' evoluta che vogliamo descrivere. Perciò se adatteremo un regolo uniformemente flessibile, per modo che tocchi tutti i descritti lati rettilinei, si curverà prossimamente secondo la forma che deve aver l' evoluta, in cui vece potrà servire, negli usi pratici, la linea descritta dallo spigolo del regolo così curvato.

§. 143. Se nella data evolvente i raggi osculatori crescano continuamente da un punto ad un altro, dal quale poi con ordine retrogrado vadano scemando, o pure scemino da un punto ad un altro, d' onde poscia prendano a crescere, l' evoluta non progredirà col medesimo ramo oltre al centro del massimo, o del minimo circolo osculatore; ma da quel centro moverà un altro ramo distinto dal primo, e procedente dalla parte opposta della tangente comune ai due rami, ma dalla medesima parte per rispetto alla comune normale. Osserviamone un esempio.

Fig. 65 Sia l' ellisse apolloniana P P'' P''' P'^v ec., nella quale descriviamo l' asse maggiore P P''', ed il minore P'' P'^v; onde sarà divisa la curva ne' quattro archi eguali e simili P'P''', PP'', P''' P'^v, P'^v P. Per un punto P' dell' arco P P'' sia condotta la normale P'K', producendola finchè incontri ambedue le PK, P''K'', che sono pure normali. Similmente possiamo immaginare un' altra normale intermedia alle due PK, P'K', come pure una fra le due P'K', P''K''; e così dicasi di quante altre normali si voglia. Dovendo l' evoluta essere tangente a tutte le dette normali, prenderà la forma della curva K K' K'', che tocca le tre PK, P'K', P''K''.

Ora se descriveremo un sistema simile di normali relativo al susseguente arco P'' P''', il secondo ramo dell' evoluta rappresentato in K'' ε' K''', che deve toccare tutte coteste normali, sarà manifestamente eguale e simile al primo ramo K K' K''; ma procederà dall' altra parte della comune tangente P'' K'', e dalle medesime parti per rispetto alla comune normale in K''.

In simil guisa ragionando sugli archi consecutivi P''' P'^v,

P'''' P , si vede manifesto essere composta l' evoluta di quattro rami eguali e simili , per essere eguali e simili fra loro i quattro archi corrispondenti dell' ellisse proposta come evolvente . Quel punto ove cessa un ramo dell' evoluta , e principia il ramo contiguo , chiamasi *punto di regresso* .

§. 144 . Ritorniamo all' idea del filo , che svolgendosi dall' evoluta , si distende in retta linea sempre tangente l' evoluta medesima , e normale all' evolvente , §. 141 , o al contrario essendo disteso in retta linea si avvolge all' evoluta . Ogni punto del detto filo descriverà una curva evolvente paralella alla prima . *La medesima evoluta può dunque avere un numero indefinito di evolventi* .

Quì poi si osservi come dalla posizione del punto descrittore , assegnabile nel filo , dipende la forma dell' evolvente che deve descrivere . Nell' addotto esempio dell' ellisse assegniamo in Π quel punto descrittore . La nuova evolvente potrà essere rappresentata dalla curva Π Π' Π'' ec., non interrotta da punti di regresso , chiusa , e divisa in quattro archi eguali e simili fra loro per mezzo dei due assi ellittici , prolungati quanto è mestieri . Una curva parimenti chiusa , senza punti di regresso , e divisa in quattro archi eguali e fra loro simili , si descriverà da un altro punto π assegnato nel filo entro lo spazio compreso dalla data ellisse; purchè la distanza del detto punto π dal corrispondente punto di contatto K', cioè la lunghezza π K', non sia minore dell' arco K K' . Ma se vorremo considerare l' evolvente descritta dal punto γ , la cui distanza γ K' dal punto di contatto K' sia minore dell' arco K K' , vedremo che la curva descritta dal punto γ deve incontrare l'evoluta in un punto β , ove cade il punto γ , se il filo avvolgasi all' evoluta stessa , o d' onde parte se da quella si svolga . Supponghiam prima che si svolga , avendo un estremo fermo in K'' . Pervenuto il punto descrittore nella retta K'' K'''' , e per conseguenza disteso in essa il filo che stava assettato all' arco K K'' , sarà descritto l' arco β β' dell' evolvente . Progredisca

allora il nominato punto descrittore verso ε'; mentre il filo s' avvolge all' arco $K''\varepsilon'$, si descriverà l' arco $\beta'\varepsilon'$ dell' evolvente. Fingiamo che il prolungamento del filo oltre ε' si adatti all' arco $\varepsilon' K'''$, e fermi un suo estremo in K'''; poscia movendo il punto ε' verso ε, sicchè il filo che svolgesi dall' arco $\varepsilon' K'''$ si distenda successivamente in retta linea, quel punto descrittore che si parte da ε', ov' era prima pervenuto, e va a cadere in ε sul terzo ramo $K''' K^{IV}$ dell' evoluta, descriverà l' arco $\varepsilon'\varepsilon$ dell' evolvente. In modo analogo saranno descritti i rami $\varepsilon\beta'''\beta''$, $\beta''\beta$, i quali compiscono l' intera evolvente, che avrà quattro punti di regresso β, ε', ε, β', e quattro distinti rami, non tutti eguali e simili fra loro; ma soltanto a due a due, come bastevolmente si fa chiaro per ciò che abbiamo ragionato sulla proposta figura 65.

§. 145. Questi, ed altri molti accidenti delle curve somministrano copioso ed utile argomento di contemplazione ai Geometri; ma le cose dichiarate fino ad ora, e ciò che resta a dire in questo capitolo, per quanto spetta alla Geometria astratta, a questo fine principalmente è ordinato, cioè di stabilir con chiarezza quei principj, dai quali partendo, si progredisce col soccorso del calcolo all'analisi più interna delle linee, e delle superficie curve, senza intrudere idee di infiniti o di infinitesimi, non comode all' intelletto, e non sempre opportunamente adoperate dagli autori.

§. 146. Intanto osserviamo come a qualunque data curva piana si conduca la normale che passa per un punto dato fuori di essa. Imperciocchè, data la curva, si potrà descrivere nel medesimo piano la sua evoluta, o coi metodi insegnati dalla Geometria sublime, se il problema dimandi rigor matematico, o col metodo approssimativo indicato nel §. 142, se trattisi di operazioni meccaniche. Descritta l'evoluta, si determina la sua tangente che passi pel punto dato; e questa sarà la cercata normale, §. 141. Laonde è chiaro che il problema in cui si propone di condurre una tangente ad

una data curva da qual si voglia dato punto fuori di essa, contiene implicito ancora l'altro del quale or abbiam data la risoluzione.

Ma vuolsi avvertire che assai volte non è possibile il problema. Imperciocchè quando il dato punto è posto in guisa che per esso condur non si possa una tangente all' evoluta, allora non si potrà nemmeno condurre una normale all' evolvente. Se per cagion d' esempio l' evoluta fosse un circolo, ed ancora un' ellisse, una parabola ec., per un punto dato entro lo spazio che si termina dall'evoluta non potrà mai passare una tangente ad essa.

§. 147. Sull'evoluta GKK'K'' ec. immaginiamo eretta una superficie cilindrica, perpendicolare al piano in cui sono descritte e la detta evoluta, e la sua evolvente Q L P P' ec. Normale a cotesto piano intendiamone condotto un altro per la tangente P K. Fatto poscia eseguire dal filo, che si rappresenta in P K K' K'', quel movimento che fu definito nel §. 141, fingiamo che porti seco l' indicato piano, sempre normale a quello delle due curve. È chiaro che quel piano toccherà sempre la superficie cilindrica in una retta insistente sul punto, ove la tangente mobile P K toccherà l' evoluta; di maniera che, pervenuta la P K nella posizione P' K', e toccando l' evoluta in K', il piano mobile toccherà la superficie cilindrica in una retta insistente sul punto K', normale al piano delle due curve, evoluta, ed evolvente. Ora immaginiamo che nel detto piano mobile, quando si trova nella posizione P K, si adatti un filo, teso, ed invariabile nella sua lunghezza, appiccato con l' un de' suoi capi al piano delle due curve in P, e coll' altro al piano mobile stesso in un punto qual si voglia della retta ove giace disteso in quel piano. Passando il piano mobile dalla posizione P K alla P' K', e quindi alla consecutiva P'' K'' ec., il filo verrà obbligato ad abbandonare il piano per applicarsi alla superficie cilindrica, intorno alla quale s' aggira il piano stesso. È poi dimostrato, §. 59 che la linea secondo Fig. 64

la quale s' applica il filo a quella superficie cilindrica è un' elica; e perciò, se tanto si mova il piano quant' è mestieri, perchè il capo del filo fermo in esso portisi sulla detta superficie cilindrica; poscia, fermo in essa quel capo, e tenendo il filo sempre teso in retta linea, si spinga l' altro capo da P in P', P'' ec., il filo svolgendosi stenderassi continuamente in retta linea, sempre tangente l' elica, ed il suo estremo P descriverà frattanto l' evolvente P P' P'' ec.

Dunque la menzionata elica sarà un' evoluta della curva P P' P'' ec., §. 141, della quale nel modo stesso possiamo descrivere quante altre evolute ci piaccia, costituite tutte nella medesima superficie cilindrica. Perciò *una curva piana avrà una sola evoluta piana; ma potrà averne infinite altre, tutte di forma elicoidica, e costituite in una medesima superficie cilindrica, perpendicolare al piano della curva data, e contenente tutti gli assi dei circoli osculatori.*

Laonde questa superficie potrà chiamarsi a ragione *superficie degli assi*, ed ancora *superficie delle evolute*.

§. 148. Intorno alle curve dotate di doppia curvatura, esaminiamo come seguendo il principio stabilito nel §. 139, si determini il circolo osculatore spettante ad un dato punto in una data curva di questo genere.

Intendiamo condotta pel dato punto la relativa tangente, ed un piano esteso indefinitamente, ad essa normale. Preso ad arbitrio nella curva un altro punto, cui nomineremo L, si potrà sempre descrivere un circolo che abbia il centro nel piano normale, la tangente comune colla curva, e la seghi nel punto L. Possiamo ancora supporre che il circolo varii continuamente, per modo che il punto L s' accosti di mano in mano al punto di contatto, e finalmente coincida con esso. Allora il circolo si chiamerà *osculatore*. Prima d' ogni altra cosa osserviamo che accostandosi il punto L al punto di contatto, scema corrispondentemente l' angolo diedro formato dal piano tangenziale, §. 27, con quello del circolo variante, e finalmente cotesto piano

coincide col piano tangenziale, quando il circolo diviene osculatore.

§. 149. Dimostreremo che *la curva proposta, e la sua projezione descritta sul piano tangenziale relativo ad un dato punto qual si voglia di essa, hanno comune in quel punto il circolo osculatore.*

In fatti sia Q *l* A projezione della curva data, sul piano tangenziale relativo al punto A, che è comune alla curva stessa, ed alla detta projezione. Sia la retta AT tangente comune in A; e pongasi *l* projezione del punto variante nominato L, §. 148, dove abbiamo supposto che il circolo, pure variante, seghi la curva obbiettiva. La projezione del centro di cotesto circolo si troverà sempre nella retta indefinita A O, posta normale in A alla T A, nel piano Q T A. La projezione poi del circolo stesso sarà sempre un'ellisse tangente in A, e secante in *l* la projezione Q *l* A della data curva obbiettiva; e l'asse minore di cotesta ellisse sarà nella retta A O. Fig. 66

Osserviamo che il circolo osculatore dell'ellisse in A deve contenere tutta l'ellisse stessa, §§. 143, 141; e perciò un circolo che tocchi in A, e seghi in *l* tanto la data ellisse, quanto la curva Q *l* A, deve avere il suo centro posto sempre fra 'l centro dell'ellisse, e quello del suo circolo osculatore in A. Rappresentiamo in *r* il primo, in *o* il secondo dei menzionati centri, ed in *r'* quello che dev' essere sempre intermedio. Avvicinandosi il punto L, e per conseguenza ancora la sua projezione *l*, al medesimo punto A, scema corrispondentemente, come abbiamo osservato, l' angolo diedro che forma il piano del circolo variante col piano tangenziale, ove è descritta la projezione della curva obbiettiva, e quella del circolo stesso, cioè l' ellisse sopra indicata. Laonde colla medesima progressione scema la differenza fra gli assi di essa, e la distanza dei due punti *r*, *o*; finchè questa divien nulla, quando il circolo variante diviene osculatore, coincidendo allora il suo piano col piano tan-

genziale, §. 148. Adunque deve coincidere nel medesimo luogo il punto r' coi due punti r, o; e per conseguenza coincideranno in uno, e il circolo osculatore della curva data, §. 148, e quello della sua projezione Q l A, §. 139, come si doveva dimostrare.

§. 150. *La retta in cui si tagliano scambievolmente due piani normali ad una curva di doppia curvatura, s' accosta indefinitamente all' asse d' un circolo osculatore, quanto è più breve l' arco della curva intercetto dai due piani normali.*

Nominiamo A, B i due punti, ne' quali è terminato l' arco proposto. Per essi intendiamo condotte le tangenti rispettive, ed ancora la corda che li congiunge, la quale sia divisa per mezzo in un punto. Chiameremo M cotesto punto; e per esso fingasi condotto un piano normale alla corda.

Si chiami P quella retta in cui si tagliano scambievolmente il piano normale alla curva in A, e l' altro normale alla corda in M. Similmente si chiami P' la retta in cui si tagliano esso piano normale alla corda, e quello normale alla curva in B. Da ultimo chiamisi P'' l' intersecazione dei due piani normali alla curva in A, e B.

Le accennate rette P, P', P'' debbono incontrarsi in un punto comune ai tre piani, i quali formeranno in quel punto un angolo solido triedro.

L' angolo piano compreso dalle due rette P, P' eguaglierà quello che misura l' inclinazione scambievole dei due piani, uno dei quali è determinato dalla tangente in A, e dalla corda A B, l' altro è determinato dalla tangente in B, e dalla corda stessa, §. 40.

Quell' angolo delle due P, P' potrà dunque essere minore di qualunque assegnabile; giacchè, accostandosi indefinitamente i due punti A, B, si può rendere piccola quanto si voglia l' inclinazione dei due piani predetti.

L' arco della curva può sempre essere così breve, che l' an-

l' angolo diedro formato da ciascheduno dei due piani normali in A, e B col terzo, normale alla corda in M, sia acuto, e minore di qualunque assegnabile; giacchè sarà sempre eguale a quello che si comprende dalla corda e dalla tangente, §. 40.

Per conseguenza l'angolo diedro formato dai due piani normali alla curva in A, e B, ed opposto al piano che è normale alla corda in M sarà ottuso, e differente da due retti quanto poco si voglia, §. 112.

Adunque scemando l' arco A B, si potrà rendere minore di qualunque assegnabile ciascuno degli angoli piani compresi dalle rette P, P', P'' nel punto comune a tutte e tre.

Laonde esse rette dovranno coincidere in una medesima, quando coincidano i due punti A, B.

Ma la P è l' asse d' un circolo che tocca in A, e sega in B la curva proposta; siccome la P' è l' asse d' un circolo che tocca in B, e sega in A la curva stessa.

Ciascheduno di questi circoli s' accosta indefinitamente ad un circolo osculatore, e perciò i loro assi accostansi anch' essi indefinitamente all' asse del detto circolo osculatore; col quale devono per conseguenza coincidere, quando coincidano insieme i due punti A, B.

Adunque coll' asse di quel circolo osculatore coincide allora anche la retta P'', che è quella in cui si tagliano i due piani normali alla curva.

§. 151. Se la curva proposta sia divisa in parti, di numero indefinito, le quali corrispondansi fra loro con qualche legge, come a cagion d' esempio siano tutte eguali; e pei punti delle divisioni si conducano poscia altrettanti piani normali alla curva, cotesti piani si taglieranno consecutivamente; e le porzioni di essi piani che rimarranno intercette fra le consecutive intersecazioni, costituiranno una superficie poliedrica, la quale si accosterà tanto più ad una superficie continua, quanto maggiore sarà il numero di esse faccie, e minor l' angolo che formano i due lati, dai quali ciascheduna è terminata; cioè quanto maggiore sa-

rà il numero delle parti, nelle quali è divisa la data curva.

Imperciocchè fingiamo che due piani normali alla curva debbano contemporaneamente scorrere lungo di essa con moto continuo, e con questa condizione, che l'arco della curva intercetto da cotesti piani normali sia sempre eguale ad uno di quelli, ne' quali è stata divisa essa curva. L'intersecazione dei due piani normali seguirà il movimento continuo di essi piani; e perciò descriverà nello spazio una superficie continua. Ma la detta intersecazione coinciderà successivamente con tutte le intersecazioni di que' piani che supponghiamo condotti normali alla curva stessa per tutti i punti delle sue divisioni. Adunque le dette intersecazioni trovansi tutte costituite in una superficie continua, generata dalla retta in cui si tagliano i due piani normali, supposti mobili lungo la curva.

Questa superficie continua è dunque circoscritta alla superficie poliedrica che si forma da tutti i piani normali.

Ma quanto sarà maggiore il numero delle parti, nelle quali è divisa la curva, tanto più prossimi saranno i piani normali, e tanto più piccoli saranno gli angoli formati dagli spigoli consecutivi della superficie poliedrica, cioè dai due lati di ciascheduna delle sue faccie. Laonde coll'ordine sopraddetto si accosterà tanto più essa superficie poliedrica alla superficie continua che la circoscriva.

§. 152. Se una retta si mova nello spazio con questa legge che debba sempre trovarsi normale al piano d'un circolo osculatore della curva data, e passare pel centro di esso circolo, descriverà una superficie continua, contenente tutti gli assi dei circoli osculatori che spettano alla curva predetta.

E poichè ogni spigolo della superficie poliedrica superiormente descritta, §. 151, si può accostare oltre ogni menoma differenza assegnabile all' asse d'un circolo osculatore, ne segue che la superficie continua circoscritta ad essa

superficie poliedrica, potrà indefinitamente accostarsi alla superficie degli assi. Questa superficie è dunque limite delle superficie poliedriche, le quali si possono generare nella maniera già indicata, ed è pur limite delle superficie continue ad esse circoscritte.

Oltre di che, il piano in cui giace una faccia dell' accennata superficie poliedrica si accosta indefinitamente ad un piano che tocca la superficie continua circoscritta, quanto più la detta superficie poliedrica si accosta alla corrispondente superficie circoscritta, cioè quanto sono fra loro più prossimi i piani normali alla curva data, §§. 82, 84. Adunque la superficie circoscritta è tale che si può accostare oltre ogni menoma differenza assegnabile ad una superficie continua tangente tutti i piani condotti normali alla curva data.

Ma fu mostrato che la superficie degli assi è limite delle superficie continue circoscritte alle superficie poliedriche sovraccennate; dunque la detta superficie degli assi tocca tutti i piani normali alla curva data.

§. 153. Se nella superficie degli assi trovisi descritta una curva tale che tutte le sue tangenti incontrino la curva data, quella prima curva sarà evoluta di questa seconda.

Si rappresenti in $p\,p'\,p''$ ec. la data curva, ed in $c\,c'\,c''$ ec. la curva descritta nella superficie degli assi, le cui tangenti cp, $c'p'$, $c''p''$ ec. incontrino rispettivamente in p, p', p'', la curva $p\,p'\,p''$ ec. Dico che la curva $c\,c'\,c''$ ec. è un' evoluta della curva $p\,p'\,p''$ ec.; cioè che un filo applicato alla curva $c\,c'\,c''$ ec., e fermo con un estremo in un punto qual si voglia c'' di essa, se prolunghisi nella direzione della tangente cp, sì che incontri coll' altro estremo la data curva nel punto p, svolgendosi poscia dalla curva $c\,c'\,c''$ in guisa che la parte di esso filo, la quale stendesi successivamente in retta linea, si trovi sempre in direzione d' una tangente della curva $c\,c'\,c''$ ec., il punto p descriverà la curva $p\,p'\,p''$ ec. Fig. 67

Imperciocchè osserviamo prima che tutte le tangenti della curva $c\,c'\,c''$ ec. sono costituite in una superficie continua, cui sarà lecito indicare per ora col nome di *superficie delle tangenti*.

In secondo luogo vuolsi notare che ogni tangente $p\,c$, $p'\,c'$, $p''\,p''$ ec., essendo costituita in un piano normale alla curva $p\,p'\,p''$ ec., §§. 152, incontra ad angoli retti la stessa curva $p\,p'\,p''$ ec.

Ciò posto, limitiamo l'attenzione ad una sola parte della superficie delle tangenti, cioè a quella che è terminata dai due archi $p\,p'\,p''$, $c\,c'\,c''$, e dalle due tangenti $c\,p$, $c''\,p''$.

Supponendo diviso in parti con qualche legge l'arco $c\,c'\,c''$ ec., e condotte le tangenti rispettive pei punti delle divisioni, verranno determinati i punti correlativi p, p', p'', ec. nella curva data.

Siano condotte le corde $p\,p'$, $p'\,p''$, ec., e le correlative $c\,c'$, $c'\,c''$ ec., come pure le rette $p'\,c$, $p''\,c'$ ec.

Coi triangoli $p\,c\,p'$, $p'\,c\,c'$ $c'\,p'\,p''$, $p''\,c'\,c''$ ec. verrà formata una superficie poliedrica inscritta nella superficie delle tangenti.

Ora supponghiamo che la faccia triangolare $p\,p'\,c$, rotando intorno al lato $p'\,c$, come suo asse, venga a porsi per diritto colla susseguente faccia $p'\,c\,c'$; il sistema di queste due faccie distese in un medesimo piano, rotando intorno alla retta $p'\,c'$, venga a porsi per diritto con la terza faccia $p'\,c'\,p''$; e così di mano in mano tutta la superficie poliedrica stendasi in un piano, come si mostra nella figura P P'P''C''C'C., ove il contorno rettilineo P P'P'' rappresenta quello che è notato dalle minori lettere cognomini p, p', p'', e giace inscritto nella data curva; il contorno C C' C'' rappresenta l'altro $c\,c'\,c''$; le rette PC, P'C', P''C'' rappresentano rispettivamente le tangenti $pc, p'c', p''c''$.

Poichè la serie dei punti c, c', c'' ec. è determinata con una legge, dalla quale pure deriva una legge che determina

la serie de' punti correlativi p, p', p'' ec., ne segue che succedonsi con una legge i punti C, C', C'' ec., e con una legge dipendente da questa succedonsi pure i punti correlativi P, P', P'' ec.

Adunque una curva potrà passare per tutti i punti C, C', C'', ed un' altra curva passar potrà pei punti P, P', P'' ec.

Oltre a ciò, quanto maggiore sarà il numero de' lati inscritti $c\,c', c'\,c''$ ec., e minore la lunghezza di ciascheduno, tanto più il poligono rettilineo $c\,c'\,c''$ ec. si accosterà alla curva $c\,c'\,c''$ ec.; e coll' ordine medesimo tanto più il poligono rettilineo C C' C'' ec. si accosterà alla curva che puot' essere ad esso circoscritta.

Similmente si conchiude che coll' ordine medesimo il poligono $p\,p'\,p''$ ec. può indefinitamente accostarsi alla curva data $p\,p'\,p''$ ec., come il corrispondente poligono P P' P'' ec. si può accostare alla curva circoscritta ad esso.

Adunque i poligoni che possiamo determinare come il poligono P P' P'' ec., si accosteranno, oltre ogni menoma differenza assegnabile, ad una curva continua, che sarà limite di essi, mentre i poligoni corrispondenti determinati come il poligono $p\,p'\,p''$ ec. si accostano indefinitamente alla curva data $p\,p'\,p''$ ec., che è il loro limite.

Non altrimenti i poligoni determinati come il poligono C C' C'' ec. si accosteranno coll' ordine medesimo ad una curva, che sarà limite di essi, mentre i poligoni corrispondenti, determinati come il poligono $c\,c'\,c''$ ec., si accosteranno alla curva $c\,c'\,c''$ ec., la quale è loro limite.

Ma poichè il poligono P P' P'' ec. è sempre eguale al suo corrispondente poligono $p\,p'\,p''$ ec., per quanto siano moltiplicati i lati dell' uno e dell' altro; e nel tempo stesso il poligono C C' C'' ec. eguaglia sempre il suo corrispondente $c\,c'\,c''$ ec., ancora i limiti rispettivi de' menzionati poligoni dovranno essere eguali; cioè la curva limite dei poligoni C C' C'' ec. eguaglierà la curva $c\,c'\,c''$ ec. che è limite dei corrispondenti poligoni $c\,c'\,c''$ ec.; come la curva limite dei

poligoni P P' P'' ec. eguaglierà la curva data $p p' p''$ ec., che è limite dei corrispondenti poligoni $p p' p''$ ec.

In oltre, supponendo descritta la curva continua CC'C''ec., quanto sarà più breve il lato C C' tanto minore sarà l' angolo C C' P', che eguaglia sempre il corrispondente $c c' p''$; e quindi esso lato si accosterà indefinitamente alla retta C'P', e nel tempo stesso si accosterà alla tangente in C'. Adunque la retta P' C'' si accosta oltre ogni menoma differenza assegnabile alla tangente in C' della curva circoscritta ad un poligono C C' C''; e similmente si concluderà delle altre rette omologhe alla P' C', come le P C, P'' C'', ec.

Perciò le rette P C, P' C', P'' C'', nelle quali cadono le corrispondenti $p c, p' c', p'' c''$, quando la superficie poliedrica stendasi in un piano, possono indefinitamente accostarsi ad altrettante tangenti della curva che è limite dei poligoni C C' C'' ec., giacchè ad essa curva si può accostare indefinitamente un poligono C C' C'', e la curva ad esso circoscritta.

Ora dimostreremo che quelle medesime tangenti sono normali alla curva limite dei poligoni P P' P'' ec.

Imperciocchè fingiamo condotti pei punti p, p', p'' ec. altrettanti piani rispettivamente normali alle rette $p c, p' c'$, $p'' c''$ ec.

L' intersecazione del piano normale alla $p c$ col piano della faccia $p c p'$, sarà una retta perpendicolare alla $p c$; le intersecazioni del piano normale alla $p' c'$ coi piani delle due faccie $p' c c'$, $c' p' p''$ saranno perpendicolari alla $p' c'$; e così di mano in mano.

Rappresentiamo nella P Q la prima delle suddette intersecazioni; nelle P' Q, P' Q' le due susseguenti; e così in seguito. È chiaro che sarà la PQ normale alla C P; le due P' Q, P' Q' saranno normali alla C' P', e costituiranno una retta sola; la P'' Q' sarà normale alla C'' P'', ec.

Moltiplicando il numero de' lati P P', P' P'' ec., e scemando nel tempo stesso la lunghezza di ciascheduno, scema per conseguenza ciascuno degli angoli Q P P', Q P' P,

Q' P' P'', Q' P'' P' ec., cioè il lato PP' s'accosta indefinitamente alla P Q; il lato P' P'' accostasi alla P' Q' ec. Ma nel tempo stesso accostasi indefinitamente il lato P P' alla tangente in P della curva circoscritta al poligono P P' P'' ec.; così il lato P' P'' si accosta alla tangente in P' della curva stessa. Adunque le P Q, P' Q', P'' Q'' si accostano indefinitamente ad altrettante tangenti della curva che è limite dei poligoni P P' P'' ec., coll' ordine medesimo con cui s' accostano le P C, P' C', P'' C'' ad altrettante tangenti della curva che è limite dei poligoni C C' C'' ec., §. 141.

Quindi concludiamo che le tangenti di questa curva sono normali all' altra precedentemente nominata; e perciò la curva limite dei poligoni C C' C'' ec. è evoluta della curva limite dei poligoni P P' P'' ec.

Laonde un filo applicato alla prima delle dette curve, fermo con un estremo in C'', e prodotto secondo la tangente C P ad incontrare l' altra curva in P, se poi si svolga stendendolo sempre in direzione tangente la prima curva, descriverà la seconda con l' estremo P; cioè la parte di esso filo che stendesi in retta linea, prenderà successivamente tutte le lunghezze P' C', P'', C'' ec., eguali rispettivamente alle $p'c'$, p'' c'' ec.

Ma la parte del filo che s' applica alla curva C C' C'' eguaglia in lunghezza la curva $c\,c'\,c''$: giacchè ad essa è uguale la C C' C''; e la parte del filo stesso che è distesa sulla C P eguaglia la lunghezza cp: giacchè eguali pur sono le due rette C P, cp. Adunque avvolto un filo alla curva $c\,c'\,c''$, fermo con un estremo in c'', e prodotto nella direzione tangente cp, finchè incontri in p la data curva $p\,p'\,p''$ ec., se poi si svolga, stendendolo sempre in direzione tangente la curva $c\,c'\,c''$ ec., acquisterà di mano in mano, colla sua parte distesa in retta linea, le successive lunghezze cp, $c'p'$, $c''p''$, ec., cioè descriverà coll' estremo p la curva proposta $p\,p'\,p''$ ec. Adunque la curva $c\,c'\,c''$ ec. è evoluta della $p\,p'\,p''$ ec.

§. 154. Il filo che svolgesi con moto continuo dall' evoluta $c c' c''$ ec. descrive, o genera una superficie continua, mentre ogni punto assegnabile in esso descrive una curva paralella alla data $p p' p''$ ec.

Di tutte le curve così descritte è dunque evoluta comune la curva $c c' c''$ ec., e la superficie nella quale giacciono esse curve potrà esser chiamata *superficie delle evolventi relative all' evoluta* $c c' c''$ ec.

§. 155. Se nella superficie degli assi v' abbia un' altra curva $m m' m''$ ec. dotata delle medesime proprietà che abbiamo assegnato alla curva $c c' c''$ ec., cioè sia tale che tutte le sue tangenti $m p$, $m' p'$, $m'' p''$, ec., incontrino la data evolvente $p p' p''$ ec., la descrizione di essa evolvente potrà eseguirsi, come prima, svolgendo un filo da questa seconda evoluta. Laonde due fila ferme rispettivamente coi loro capi in due punti c'', m, i quali siano in un medesimo asse $c'' u$, applicate alle rispettive curve $c'' c' c$ ec., $m m' m''$ ec., e prodotte lungo le tangenti $c p$, $m'' p$, primieramente dovranno incontrarsi nel punto p, che appartiene alla data evolvente; in secondo luogo svolgendosi ad un tempo stesso dalle loro evolute, descriveranno col punto del loro concorso p la detta evolvente $p p' p''$ ec.

Da ciò si vede che le evolute di una curva anche di doppia curvatura, debbon esser tali, che se pei punti ne' quali esse evolute sono segate da un medesimo asse conducansi le rispettive loro tangenti, queste dovranno incontrarsi in un medesimo punto della proposta evolvente.

§. 156. Quando la data evolvente è piana, tutti gli assi dei circoli osculatori sono fra loro paralelli; quindi segue che le tangenti $p m''$, $p c$, o le fila da esse rappresentate, seguono nello svolgersi un vero, e semplice movimento di rotazione; e perciò i triangoli $p m'' c$, $p' m' c'$, $p'' m c''$ ec., sono tutti fra loro simili. Laonde il triangolo $m p'' c''$ eguaglierà il quadrilatero mistilineo $m c'' c' m'$ giacente nella superficie degli assi, insieme col triangolo $m' c' p'$;

que-

questo eguaglierà il quadrilatero mistilineo $m' c' c m''$ insieme col triangolo $m c p$; e così di mano in mano.

Rappresentando dunque separatamente nel triangolo rettilineo $\gamma \mu \pi$ il triangolo $m c'' p''$, esso triangolo $\gamma \mu \pi$ conterrà il triangolo $\mu' \gamma' \pi$, eguale e simile al triangolo $m' c' p'$; il detto triangolo $\mu' \gamma' \pi$ conterrà l' altro $\mu'' \gamma'' \pi$, eguale, e simile al triangolo $m'' p c$, ec.

I cateti $\gamma \mu$, $\gamma' \mu'$, $\gamma'' \mu''$ corrisponderanno, e saranno eguali ordinatamente alle parti degli assi $c'' m$, $c' m'$, $c m''$, e saranno tutti similmente inclinati a ciascheduna delle due rette $\mu \pi$, $\gamma \pi$, nelle quali stendonsi le due evolute.

Ma in questo modo non va la cosa quando la proposta evolvente $p p' p''$ ec. sia dotata di doppia curvatura. Imperciocchè allora le due fila $p m''$, $p c$ non solamente seguono un moto di rotazione intorno all' asse $c m''$, portandosi verso la successiva posizione delle due tangenti $p' m'$, $p' c'$, ma ubbidiscono ancora ad un altro movimento che fa variare le rispettive misure degli angoli $p m'' c$, $p c m''$; onde il triangolo $p c m''$ non sarà simile al triangolo successivo $p' c' m'$, nè questo sarà simile al triangolo $p'' c'' m$; e così in seguito.

Ora col variare degli angoli adjacenti agli assi, varia pur l' angolo che comprendono le due fila, o sia le due tangenti $p m$, $p c$, nel punto del loro concorso p, o pure quell' angolo rimane costante?

Ammette il Sig. Monge che sia costante; e secondo questa massima insegna una maniera facile di segnare sopra la superficie degli assi le due evolute $c c' c''$ ec., $m'' m' m$ ec.; e similmente quante altre si voglia.

Costrutta che sia la superficie degli assi, ed assegnati i punti m'', c, pei quali dovranno passare le due evolute, si stenda in retta linea un filo, per modo che passi pel punto m'', ivi toccando la superficie degli assi, e vada ad incontrare in un punto p l' evolvente. In simil modo stendasi un altro filo che tocchi la detta superficie in c, e vada ad incontrare l' evolvente in quel medesimo punto p.

Ciò posto, le due fila si mantengano sempre tese, ed avvolgansi nel medesimo tempo intorno alla superficie degli assi. Quelle curve $c\,c'\,c''$.... ec., $m''m'\,m$ ..... ec., secondo le quali si adatteranno alla detta superficie, debbon essere le cercate evolute.

Esporrò brevemente la sostanza della dimostrazione che dà l'autore, valendomi, ove torni acconcio, delle sue stesse parole.

Se per due punti della curva proposta, *infinitamente vicini* siano condotti ad essa due piani normali, l'intersecazione di questi piani *sarà l'asse d'un circolo, del quale si può considerar come parte il piccolo arco della curva*. Per conseguenza se dagli estremi di quell'arco siano condotte all'*asse* predetto due perpendicolari, *esse lo incontreranno in un medesimo punto, che sarà il centro del detto circolo. Ciascun altro punto dell'asse sarà ad eguale distanza da tutti i punti dell'arco infinitamente piccolo; e per conseguenza tutti i punti dell'asse potranno essere considerati come i poli dell'arco* (*). Quindi s'inferisce che due rette condotte dagli estremi dell'arco ad un punto dell'asse *saranno eguali fra loro, e formeranno con l'asse angoli eguali*.

Ciò premesso, dividasi la data curva in archi infinitamente piccoli; e pei punti delle divisioni siano condotti altrettanti piani normali. Nomino P, per brevità, il primo di questi piani: P' il secondo: P'' il terzo; e così in seguito. Chiamo inoltre I l'intersecazione dei due piani P, P': I' l'intersecazione dei due P', P'': I'' l'intersecazione dei due P'', P''', ec. La retta I incontrerà la I' in un punto, cui nomino r; La I' incontrerà la I'' in un altro punto, cui nominerò r'; La I'' incontrerà la I''' in un terzo punto r'', ec.

I poli del primo arco, o *elemento* della curva saranno

(*) Chiamasi asse d'un circolo la retta condotta pel centro normale al suo piano; e polo del circolo stesso, qualunque punto del suo asse.

nella retta I; I poli dell' arco susseguente saranno nella I'; I poli del terzo arco saranno nella I''; e così di mano in mano.

In tal maniera si forma una superficie poliedrica, le cui faccie *sono porzioni di piani infinitamente strette*, *infinitamente lunghe*, *le quali si tagliano consecutivamente in rette linee*. Ciò posto si può sempre immaginare che la prima faccia roti intorno alla retta I, come suo asse, finchè pervenga nel piano della faccia consecutiva; in seguito che il sistema della prima e della seconda, così distese in un medesimo piano, roti intorno alla retta I', finchè il detto piano cada su quello della terza faccia; e così proseguasi fino a tanto che tutta la superficie poliedrica si trovi distesa sul piano dell' ultima faccia.

Dal punto della curva, pel quale fu condotto il primo piano P, sia tirata in esso piano, e secondo una direzione arbitraria una retta che incontri la I in un punto, cui chiamerò g. Per questo punto e per quello della curva, dal quale fu condotto il secondo piano P', si tiri in esso piano una retta, la quale incontri la I' in un punto g'. Per questo punto, e pel susseguente punto della curva, dal quale fu condotto il terzo piano P'', si guidi in esso piano una retta, la quale incontri la I'' in un punto g'', ec.

La curva che passa per tutti i punti g, g', g'' . . . . *è un' evoluta della proposta*.

Imperciocchè 1° *tutte le rette ora condotte sono tangenti della curva che contiene i punti* g, g', g'' *ec.*, *perchè sono i prolungamenti de' suoi elementi*. 2° *Se intendiamo che la prima roti intorno al punto* g *per venire ad applicarsi alla susseguente*, *essa non cesserà d' esser tangente della curva* g g' g'' . . . *ec.*, *ed il suo estremo*, dove incontra la curva data dopo aver percorso il primo arco, *si confonderà coll' estremo della seconda*. *Facciasi rotar similmente la seconda intorno al punto* g', *finchè venga a cadere sopra la terza; ed il suo estremo non uscirà dal second' arco*; *e così in seguito*.

Adunque la curva g g' g'' . . . è tale, che se una delle sue tangenti giri intorno ad essa, senza che cessi d'esserle tangente, e senz' aver movimento veruno nel senso della sua lunghezza, un punto di essa tangente descriverà la curva data. Adunque la g g' g'' . . . ec. è una delle sue evolute. Ma la direzione della prima retta fu arbitraria; e secondo qualunque altra direzione fosse stata condotta nel primo piano P, *si trovava un' altra curva, che sarebbe stata parimente evoluta della proposta. Adunque una curva qualsivoglia ha un' infinità di evolute, tutte comprese nella superficie degli assi ec.*

§. 156. Quantunque io tenga per vera la conclusione, ammetter non posso il discorso per cui si deduce, senza mancare all'esattezza geometrica che mi sono proposto di osservare, quanto più rigorosamente per me si possa, nel corso di questo trattato.

Imperciocchè, nè per quanto sian piccoli gli archi, detti *elementi della curva*, mai potranno spogliare la natura di essa, e tramutare le loro proprietà in quelle di archi circolari; nè l' intersecazione di due piani normali alla curva, sian pur prossimi quanto si voglia, sarà mai l' asse d' un circolo che passi pegli estremi dell' arco intercetto dai detti piani, §. 150; nè due rette condotte da quegli estremi ad incontrare in un medesimo punto l'intersecazione dei due piani normali potranno formare angoli simili con essa intersecazione, ed essere fra loro eguali, fuorchè in qualche caso particolarissimo; nè volendo che le due rette accennate formino angoli simili con quella intersecazione, potranno incontrarla in un medesimo punto; nè per conseguenza potrà esser vero che girando una di quelle rette intorno all' intersecazione predetta come suo asse, e conservando immutata la propria inclinazione coll'asse medesimo, trasferiscasi nella posizione dell' altra retta consecutiva; onde non sarà neppur vero che la retta, cui supponghiamo rotare, non cessi mai d' incontrar l' elemento

della curva, durante il suo moto; Imperciocchè dato ancora che l'intersecazione dei due piani normali sia l'asse d'un circolo, il quale passi pegli estremi dell'arco assegnato nella curva, mai non potrà coincidere con quest'arco l'arco corrispondente della curva proposta; nè mai sarà lecito supporre che la tangente d'una curva possa moversi intorno al punto del suo contatto senza cessare d'esser tangente, ec.

Dopo le quali osservazioni, reputo mio dovere il tentare per altre vie una dimostrazione rigorosa.

§. 157. Riducasi alla memoria quella superficie poliedrica formata dai piani normali alla curva proposta, §. 155; e si chiami p il punto della curva, pel quale fu condotto il primo piano P. Chiameremo dunque pg la prima retta condotta dal punto p con direzione arbitraria ad incontrare in g la retta I. Nel secondo piano P' s'intenda tirata pel punto g una retta gg' inclinata alla I come la pg, e producasi ad incontrare in un punto g' la I'.

Nel terzo piano P'' intendasi condotta pel punto g' una retta $g'g''$ inclinata alla I' come la $g'g$, e producasi ad incontrare la I'' in un punto g''. Così proseguasi di mano in mano la descrizione d'una serie di rette gg', $g'g''$, $g''g'''$ . . . ec., le quali formeranno nella superficie poliedrica un poligono rettilineo, ed i prolungamenti dei lati di questo poligono, in generale non incontreranno la curva data.

Ma se la prima retta gp roti intorno alla I come suo asse, senza mutare la propria inclinazione con essa I, si trasferirà sul prolungamento della $g'g$, portando in esso il punto p, e descrivendo frattanto con questo punto p un arco circolare pp', intercetto dai due piani P, P', del qual arco, I sarà l'asse.

Potremo dunque nominare $g'p'$ la seconda retta, la quale incontra in g' la I'; e facendola rotare intorno alla I', come la precedente intorno alla I, si trasferirà sul prolunga-

mento della $g'' g'$, descrivendo frattanto un arco circolare $p' p''$ intercetto dai piani P', P'', del qual arco, I' sarà l'asse.

Similmente, poichè il punto p' si è trasferito in p'' sul prolungamento della $g'' g'$, nomineremo $g'' p''$ la terza retta consecutiva, la quale rotando intorno alla I'' descriverà un altr' arco circolare $p'' p'''$; e così in seguito.

In tal maniera tutti i lati del poligono rettilineo $g g' g''$... ec. verranno successivamente a porsi in una medesima direzione con la retta gp, mentre l'estremo p dovrà descrivere un poligono circolare $p p' p''$ . . . ec., i lati del quale saranno rispettivamente normali alle rette gp, $g' p'$, $g'' p''$. . . ec., come pure ai piani P, P', P'' . . . ec.

Queste condizioni sussistono, per quanto sia moltiplicato il numero de' piani normali, e diminuite le distanze dei loro punti d' incontro con la data curva. Ma la superficie poliedrica si accosterà oltre ogni menoma differenza assegnabile alla superficie degli assi, §. 151, e nel tempo medesimo si accosterà indefinitamente il poligono rettilineo $g g' g''$ ec. ad una curva continua giacente nella detta superficie degli assi, conciossiachè tutti i punti g, g', g'' ec. possono essere determinati con una legge uniforme.

Non altrimenti s' accosterà il poligono circolare $p p' p''$... ec. ad una curva continua che passi per tutti i punti p, p', p'' . . . ec., i quali sono sempre determinati correlativamente ai punti g, g', g'' . . . ec.

Adunque nella superficie degli assi v' ha una curva limite dei poligoni rettilinei g g' g'' . . . ec., e nello spazio v' ha una curva limite dei poligoni circolari $p p' p''$ . . . ec.

La retta $g' p'$ eguaglia la gp insieme col primo lato $g g'$ del poligono rettilineo $g g' g''$. . . ec. La $g'' p''$ eguaglia la $g' p'$ insieme col secondo lato $g' g''$, o pure eguaglia la gp insieme coi due lati $g g'$, $g' g''$; e così di mano in mano. Dal che si vede che svolgendo dal poligono rettilineo un filo che arrivi con un estremo al punto p, descriverà con quest' estremo p il poligono circolare $p p' p''$ . . . ec.

La periferia del poligono rettilineo è dunque un'evoluta del poligono circolare.

Questa relazione sussiste in qualunque prossimità si trovino i due poligoni coi rispettivi loro limiti; ed oltre a questo ciascun lato del poligono $g g' g''$ . . . ec. tanto è più prossimo ad una tangente della curva che è suo limite, quanto più prossimo a questa curva è il poligono medesimo. È dunque forza conchiudere che ancora svolgendo un filo dalla curva limite del poligono rettilineo $g g' g''$ . . . ec., e stendendolo sempre in direzione tangente la curva stessa, quel filo descriverà con un suo punto p la curva che è limite del poligono circolare $p p' p''$ . . . ec. Questa seconda curva è dunque un' evolvente dell' altra, ed è normale a tutti i piani P, P', P'' . . . ec., i quali toccano la superficie degli assi.

Ciò posto, io dico che l' evolvente $p p' p''$ . . . ec. deve coincidere con la curva proposta.

Imperciocchè per essere queste curve ambedue normali ai piani P, P', P'' ec., saranno fra loro paralelle. Adunque i loro punti omologhi, nei quali sono incontrate da un medesimo piano normale, si troveranno sempre ad una distanza costante, §. 48, in tutte le successive posizioni di esso piano.

Ma le due curve hanno comune il punto p; ivi dunque la distanza di due punti omologhi è nulla; e perciò nulla sarà pur la distanza dei consecutivi punti omologhi; cioè a dire le due curve coincideranno.

§. 158. Se in vece di movere la retta $g p$ intorno alla I come suo asse, §. 157, si farà girare intorno alla I la prima faccia della superficie poliedrica, finchè sia per diritto con la seconda, il punto p descriverà egualmente il medesimo arco circolare $p p'$. Così facendo che il sistema della prima e della seconda faccia, poste in un medesimo piano, roti intorno alla I', finchè si trovi per diritto con la terza faccia, il punto p, che pel movimento precedente si

è trasferito in p', descriverà successivamente l'arco $p'p''$.

In simil modo proseguendo a stendere di mano in mano le faccie del poliedro in un piano medesimo, si descriverà il medesimo poligono circolare $pp'p''$ . . . ec., mentre il poligono rettilineo si stenderà in una medesima direzione con la prima retta gp.

E perchè la superficie poliedrica si accosta indefinitamente al suo limite, che è la superficie degli assi, quello spazio piano in cui può stendersi la detta superficie poliedrica, si accosterà parimenti ad uno spazio piano in cui può stendersi la superficie degli assi.

Ma il poligono rettilineo si stende sempre in retta linea, qualunque sia la prossimità della superficie poliedrica a quella degli assi, e per conseguenza qualunque sia la prossimità del poligono stesso alla curva che è suo limite; adunque essa curva si stenderà pure in una retta, quando la superficie degli assi stendasi in un piano.

Perchè poi sussisterà il medesimo discorso qualunque direzione s'attribuisca a quella prima retta gp, purchè incontri la retta I; e qualunque altra curva ne derivi come l'evoluta $gg'g''$ . . . ec., §. 157, ne segue

1° *Che infinite evolute possono corrispondere alla medesima evolvente, e saranno tutte costituite nella superficie degli assi.*

2° *Che stendendo in un piano la superficie degli assi, tutte le evolute relative ad una medesima evolvente debbono stendersi in altrettante rette linee, concorrenti ad un medesimo punto.*

3° Che venendo a collocarsi in quelle rette successivamente tutte le tangenti delle evolute rispettive, *le tangenti relative a due evolute, incontrandosi scambievolmente, formano un dato angolo costante.*

§. 159. Osserviamo che stendendo in un piano la superficie poliedrica, le rette I, I', I'' . . . ec., incontrandosi consecutivamente a due a due, §. 155, formeranno

no in quel piano un poligono rettilineo eguale a quello che formavano nello spazio, ed era determinato dai punti r, r', r'' . . . ec. Quel poligono si può accostare indefinitamente ad un limite, che è una curva denominata *linea di regresso* dal Sig. Monge (1); e parimenti s' accosterà ad un limite il corrispondente poligono steso in piano.

Siccome poi ciascun lato del primo poligono $rr'r''$ ... ec., che è nello spazio, s' accosta indefinitamente ad una tangente della curva, la quale è limite di esso poligono; così ciascun lato del poligono corrispondente, steso in piano, accostasi ad una tangente della curva piana, che parimenti è limite di questo secondo poligono, §. 22.

Ma i lati del poligono $rr'r''$ . . . ec., costituito nello spazio, sono rispettivamente nelle rette I, I', I'' . . . ec., le quali abbiam veduto che s' accostano oltre ogni menoma differenza assegnabile agli assi de' circoli osculatori, §. 150.

Adunque, *nello spazio, gli assi de' circoli osculatori sono tutti tangenti la curva di regresso* $rr'r''$ . . . ec.; *e gli assi medesimi descritti nella loro superficie, quando è distesa in piano, sono tangenti quella curva piana alla quale s' adatta essa curva di regresso.*

§. 160. Segue ora il quesito: se la curva in cui sono tutti i centri de' circoli osculatori della curva proposta di doppia curvatura, sia pure una sua evoluta.

Dimostra il Sig. Monge che non può essere; e lo dimostra partendo da questo principio: che *due tangenti consecutive d' una curva di doppia curvatura in qualunque luogo della curva si prendano, trovansi in un medesimo piano, e le tangenti d' un' evoluta si debbono consecutivamente incontrare a due a due* (2).

Così fatto principio, stando alla lettera, condurrebbe tosto all' assurdo, §. 27. Sostituisco dunque il seguente ragionamento.

(1) Feuilles ec. . . . N.° 32. (2) Feuilles ec. . . . N.° 32.

Supposta distesa in un piano la superficie degli assi, §. 155, immaginiamo descritti in essa quanti assi vogliasi, I, I', I''. . . ec., ed ancora siano descritte due rette nelle quali stendonsi due evolute, §. 158.

Dal punto ove concorrono quelle due rette, sia condotta una normale a ciascun asse.

È manifesto che il punto ove un asse è incontrato dalla rispettiva normale è il centro d' osculo relativo a quell' asse; e perciò sarà un punto di quella linea alla quale deve adattarsi la curva de' centri in quel piano supposto.

È parimenti manifesto che tutti i punti determinati in tal maniera non possono giacere in una medesima normale.

Adunque stendendo in piano la superficie degli assi, mai non potrà stendersi in una retta, su quel piano, la linea de' centri.

Laonde *la curva de' centri non potrà mai essere evoluta della proposta curva di doppia curvatura* §. 138.

§. 161. Ma questo teorema non si conforma al sentimento di La Grange, pubblicato nella Teoria delle Funzioni analitiche (1), ove afferma poter essere talvolta la curva de' centri un' evoluta della proposta curva di doppia curvatura.

Quest' obbiezione ha la sua risposta, ch' io darò in altro tempo, se sarà necessario, non potendosi esprimere chiaramente se non per mezzo del calcolo, il quale per massima è escluso da questo trattato (2).

Del resto cotali teorie non sono punto necessarie per le pratiche delle quali tra poco ragioneremo.

§. 162. Frattanto non sarà inutile considerare la maniera di costruire con approssimazione meccanica la superficie degli assi.

Immaginiamo condotti alquanti piani normali alla proposta curva, i quali saranno tutti tangenti la cercata su-

(1) Théorie des Fonctions Analytiques N.° 142.

(2) V. la Prefazione.

perficie degli assi, §. 151. Perciò l'intersecazione di questa superficie con qualsivoglia dei tre piani coordinati sarà una curva tangente tutte le intersecazioni del piano medesimo coi detti piani normali, §. 82.

Troviamo dunque tutte queste intersecazioni, §. 32., e col metodo già indicato, §. 142, determiniamo prossimamente la curva che le tocca tutte.

Ogni punto di contatto apparterrà ad uno degli assi, contenuti nella superficie che si dimanda.

Nominiamo A, B, C . . . ec. le intersecazioni dei supposti piani normali coll'assunto piano coordinato, e dicansi *a*, *b*, *c* . . . ec. i relativi punti di contatto. In seguito determiniamo le intersecazioni di que' medesimi piani normali con un piano paralello a quel piano coordinato, e nominiamo A', B', C', ordinatamente, le nuove intersecazioni corrispondenti alle prime, e ad esse rispettivamente paralelle; cioè la A' alla A; la B' alla B, ec.

Determineremo ancora la curva che tocca le A', B', C', ec., e chiameremo *a'*, *b'*, *c'* ec. i punti di contatto. È chiaro che i due punti *a*, *a'* appartener debbono ad un medesimo asse; i due *b*, *b'* ad un altro; e così di mano in mano.

Quanto maggiore fingiamo il numero de' piani normali, e più vicini i punti di contatto *a*, *b*, *c*, ec., come pure i corrispondenti *a'*, *b'*, *c'* ec., tanto più s'accosterà ad una superficie continua la superficie poliedrica formata dai detti piani normali.

Ma se descriveremo le intersecazioni di quei medesimi piani con un terzo paralello ai due precedenti, uno de' quali è l'assunto piano coordinato, e descrivasi la curva tangente tutte le nuove intersecazioni, la quale rappresenterà una terza sezione fatta nella superficie degli assi, potremo concepire in seguito una retta, la quale progredisca con moto continuo incontrando sempre le tre curve menzionate.

In ogni sua posizione quella retta coinciderà con uno

degli assi; e perciò descriverà la superficie che li contiene tutti.

Questo concetto potrà essere tradotto alla pratica, foggiando tre tavole sottili, o tre lamine piane, secondo le figure delle descritte curve, e collocando ciascheduna di queste tavole in quella posizione che deve avere la curva corrispondente.

Allora sui lembi di coteste tavole, così conformate, se faremo scorrere lo spigolo d'un regolo, sì che incontri sempre tutti e tre i lembi, ogni posizione di esso spigolo determinerà quella d'un asse.

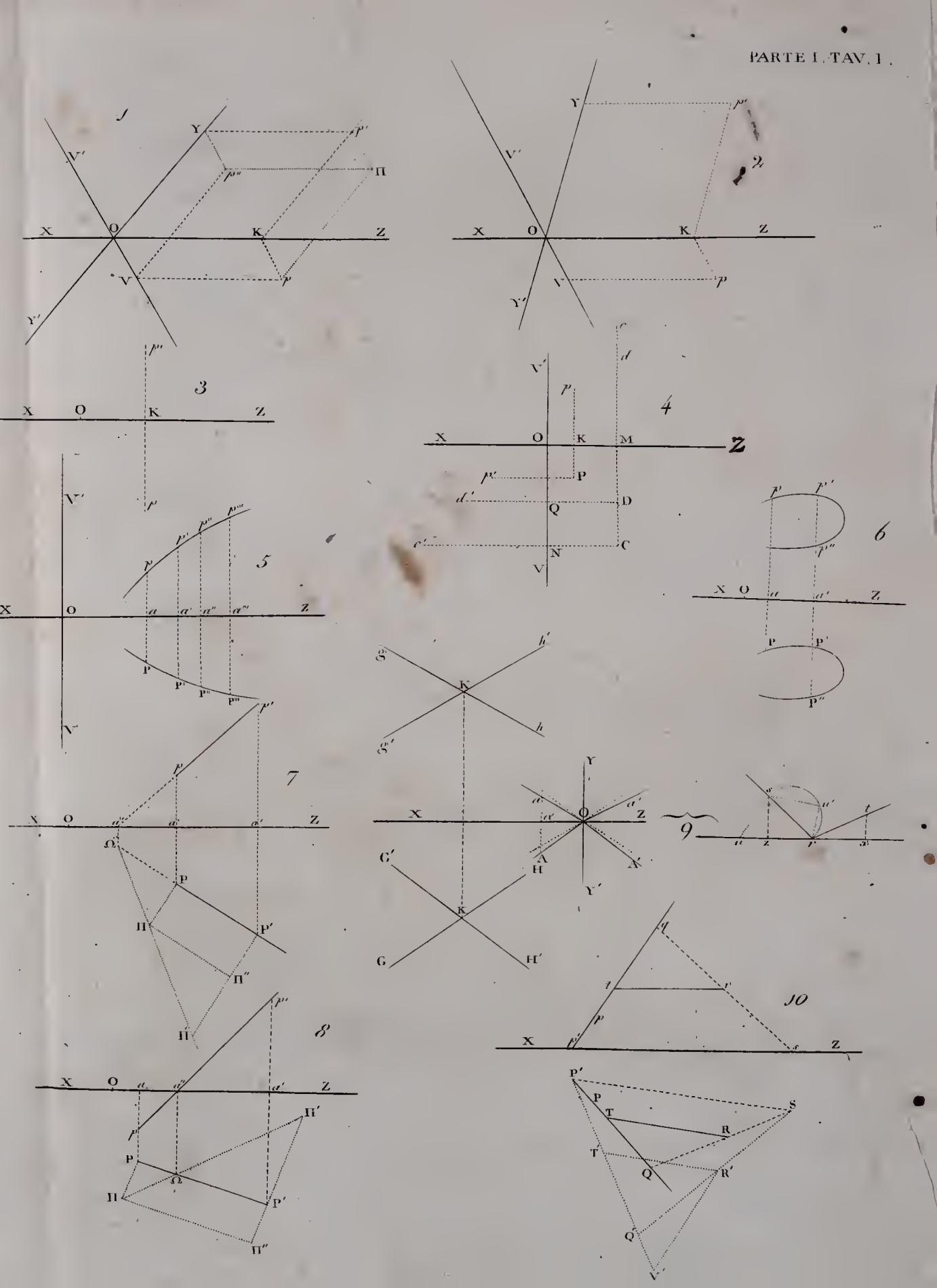
§. 163. Ora possiamo rendere generale per ogni maniera di curve la risoluzione del problema proposto nel §. 146, rispetto alle curve piane.

In fatti, essendo data una curva qualunque, sarà determinata la superficie che contiene tutti gli assi de' suoi circoli osculatori.

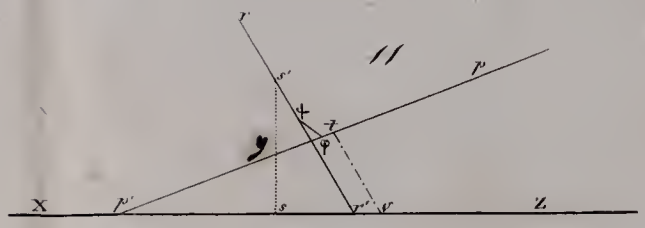
Se a quella superficie sia condotto un piano tangente che passi pel punto dato in qualunque modo nello spazio, §. 133, quel piano sarà normale alla data curva, §. 151; e perciò la retta che unisca il punto dato con quello ove la curva è segata dall'accennato piano tangente, sarà la normale richiesta. Tante poi saranno le normali soddisfacenti al quesito, quanti sono i piani che passando pel dato punto, possono esser tangenti la detta superficie degli assi. Oltre di ciò osserviamo che se dal punto dato non si possa condurre un piano tangente la superficie degli assi, impossibile è il problema.

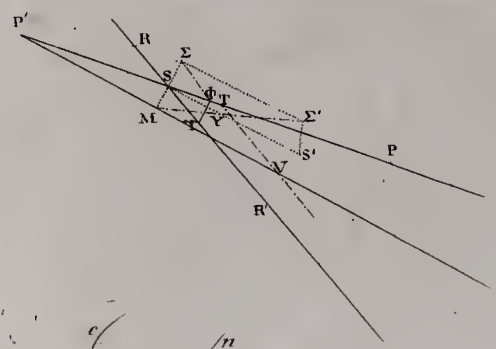
Adunque tutti i punti dello spazio che può essere compreso dalla menzionata superficie, soggiacciono a questa eccezione.

Fine della Parte I.

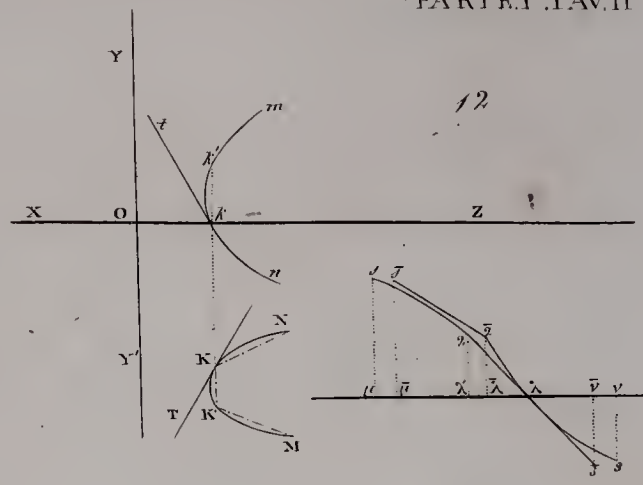

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
X
O
K
Z
V'
Y
Y'
V
p
p'
p''
p'''
Π
Π'
Π''
P
P'
P''
P'''
a
a'
a''
a'''
d
d'
c
c'
M
Q
N
C
D
h
h'
G
G'
H
H'
A
A'
s
t
r
S
R
R'
T
T'

11

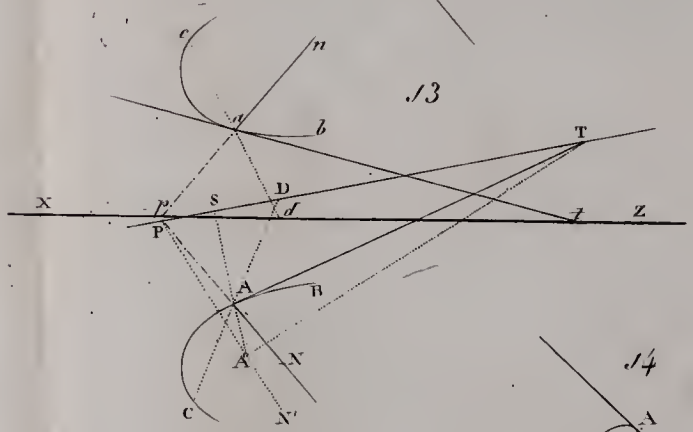




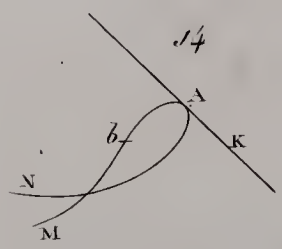
12



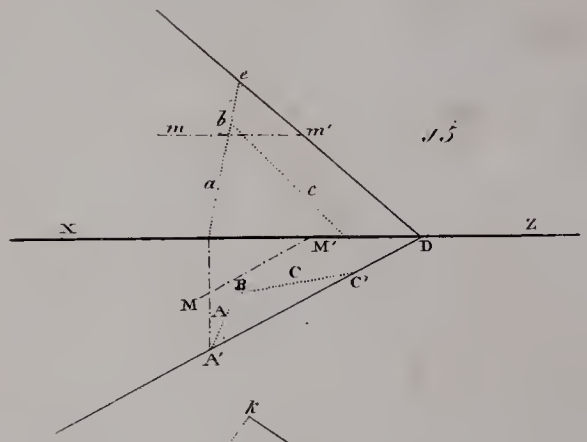
13



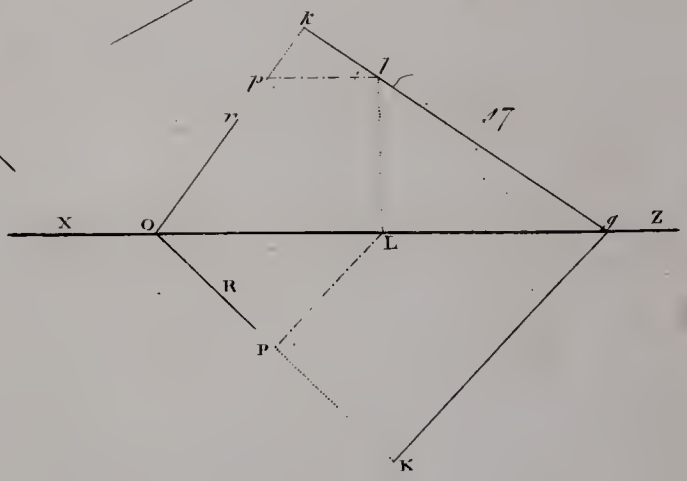
14



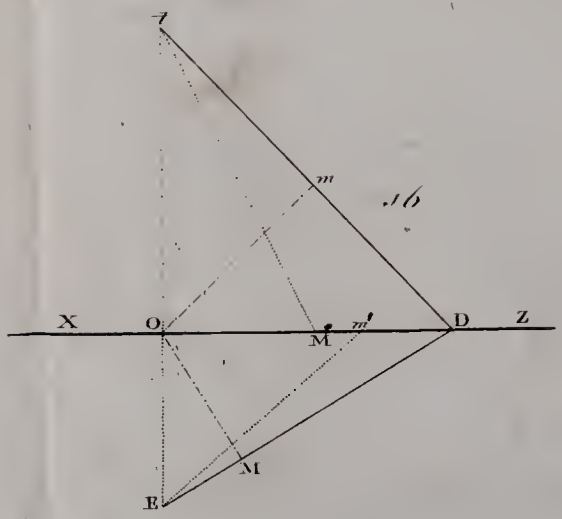
15



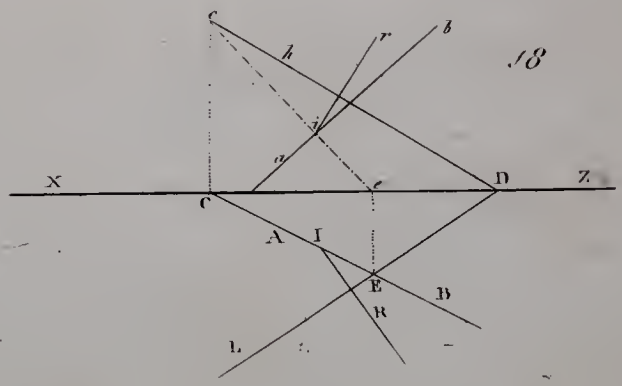
17

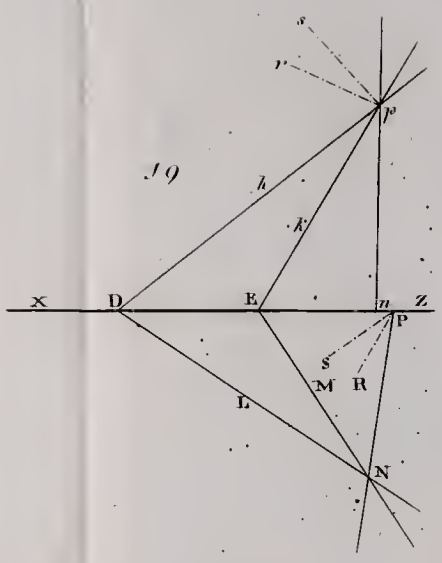


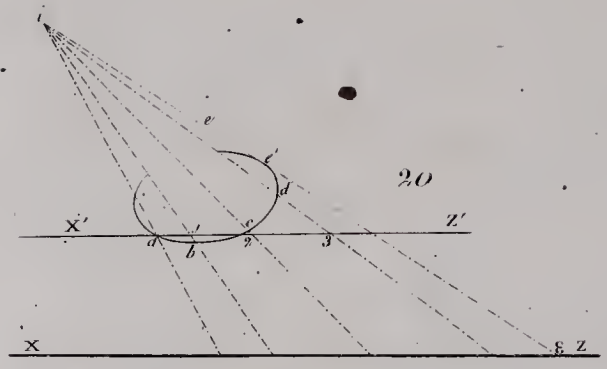
16

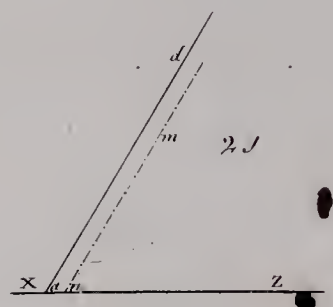


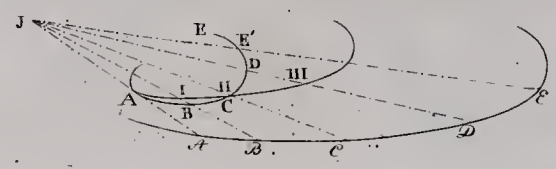
18

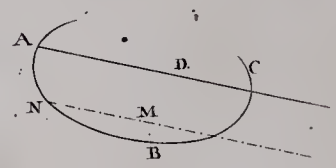


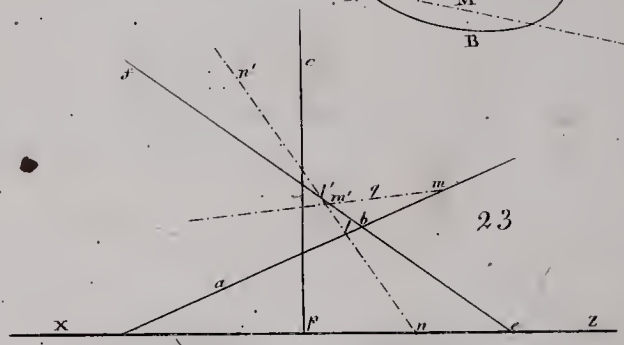

19
X
D
E
n
Z
P
h
k
s
r
p
S
M
R
L
N

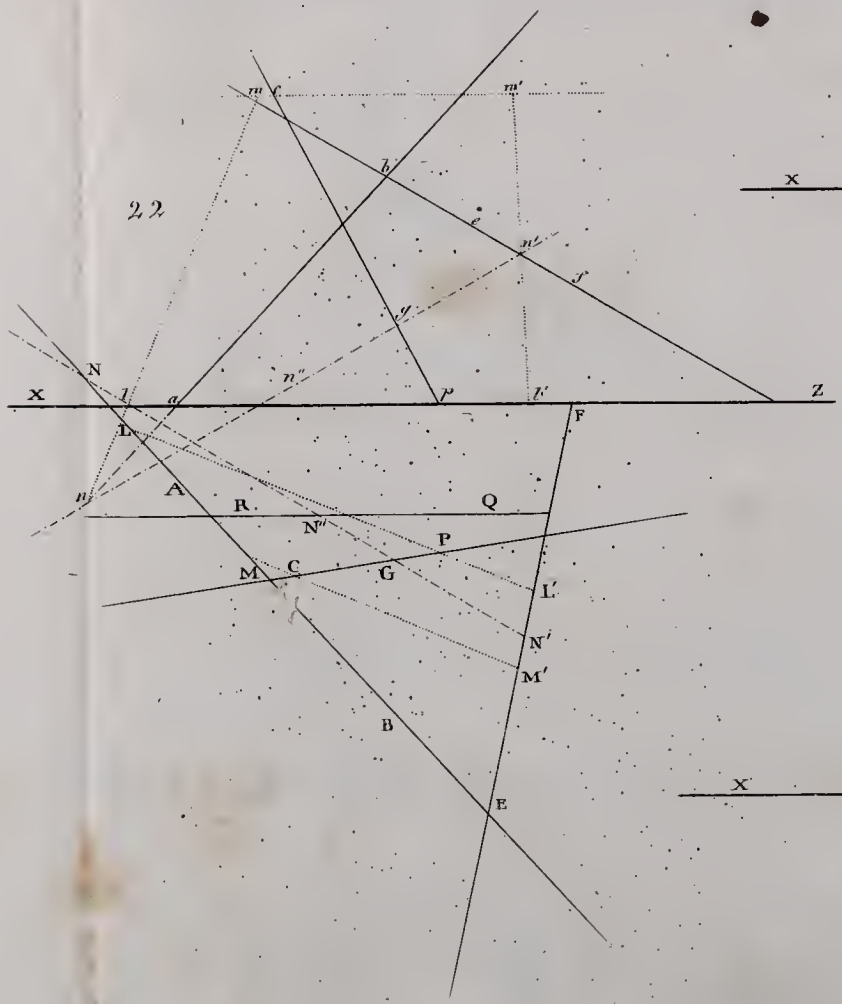

20
X'
Z'
X
Z
a
b
c
d
e
i
1
2
3

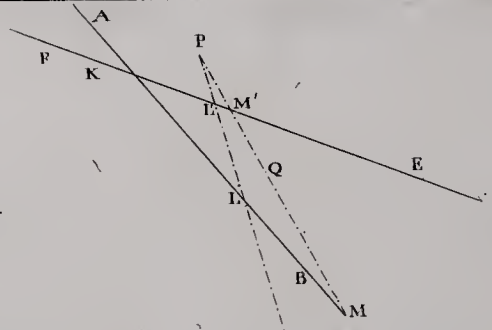

21
X
Z
a
n
m
d

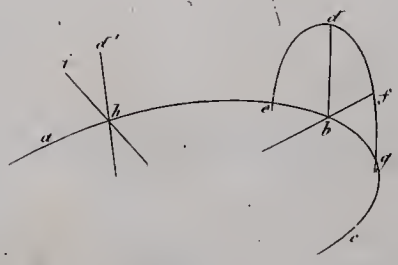

J
E
E'
D
III
A
I
II
B
C
A
B
C
D
E

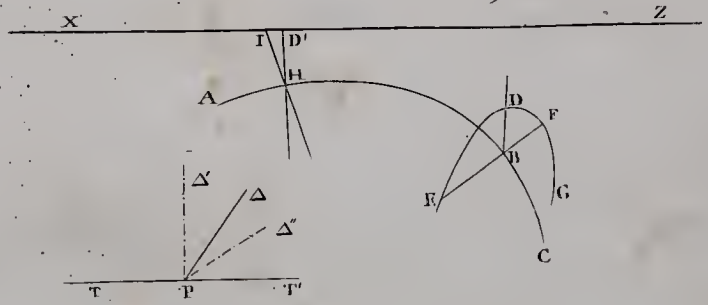

A
D.
C
N
M
B

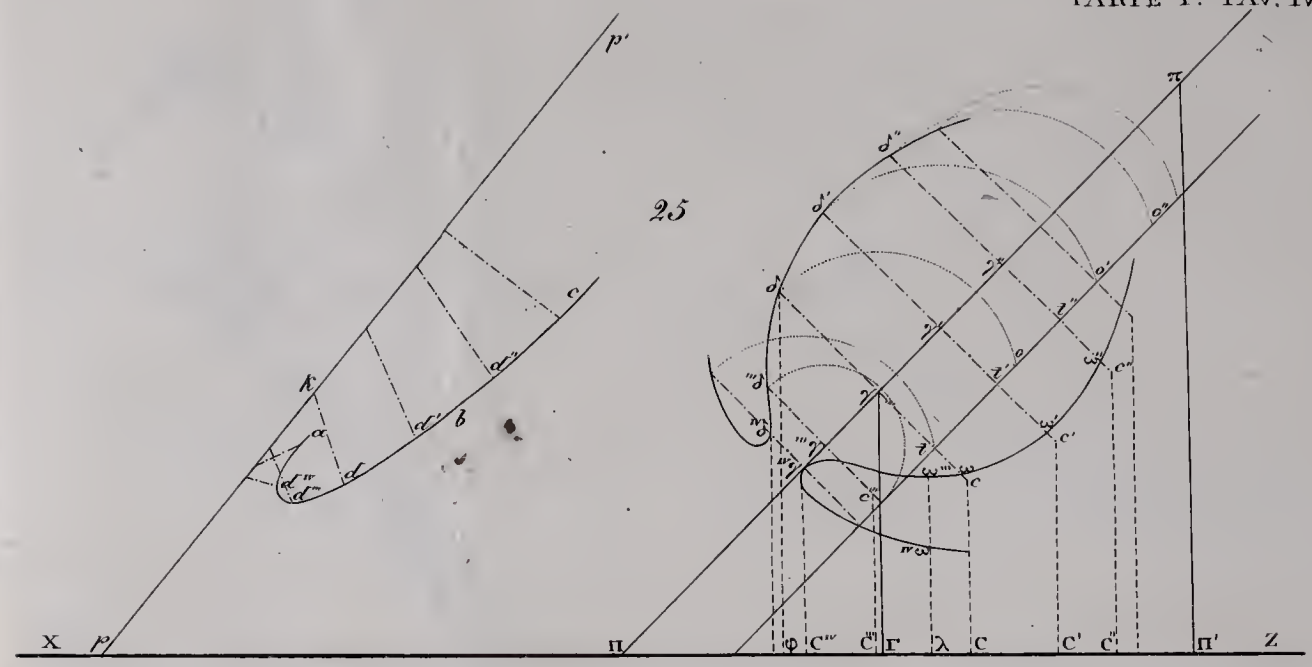

23
X
Z
p
n
e
a
b
m
l
n'
c
s

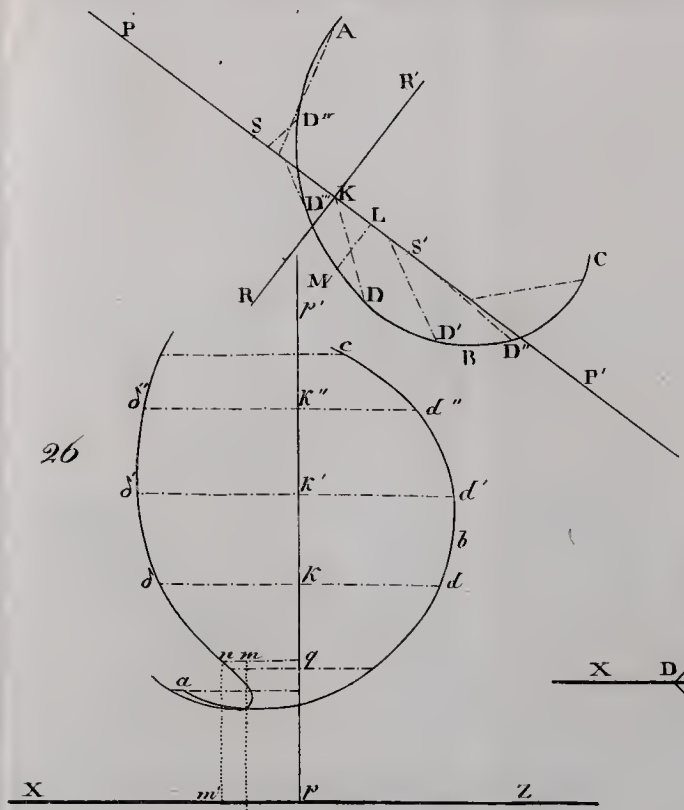

22
X
Z
N
L
n
A
R
Q
N''
P
M
C
G
F
L'
N'
M'
B
E
m
c
m'
h
e
n'
s
d
n''
a
p
r

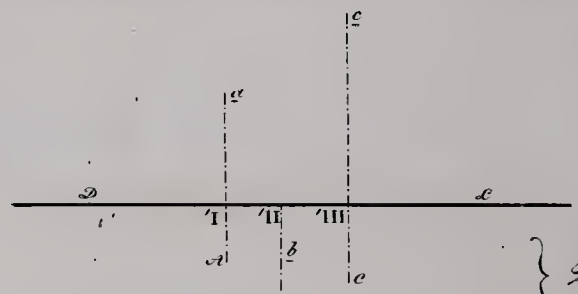

A
P
F
K
L
M'
Q
E
L
B
M

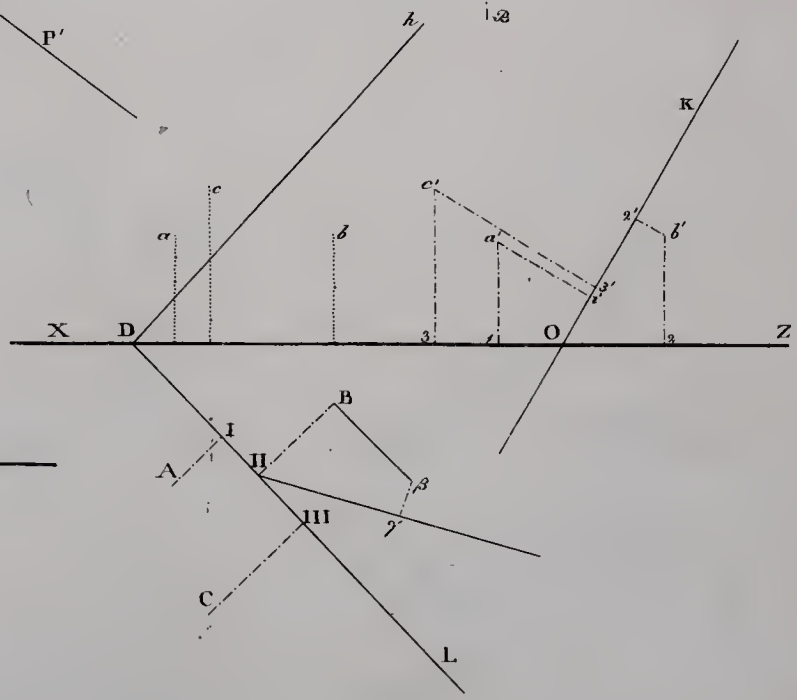

24
i
d'
h
a
d
f
e
b
g
c

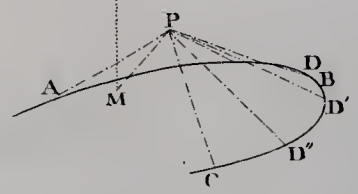

X
Z
I
D'
H
A
D
F
B
E
G
C
Δ'
Δ
Δ''
T
P
T'


25
X
p
p'
k
c
b
d
π
π'
Z

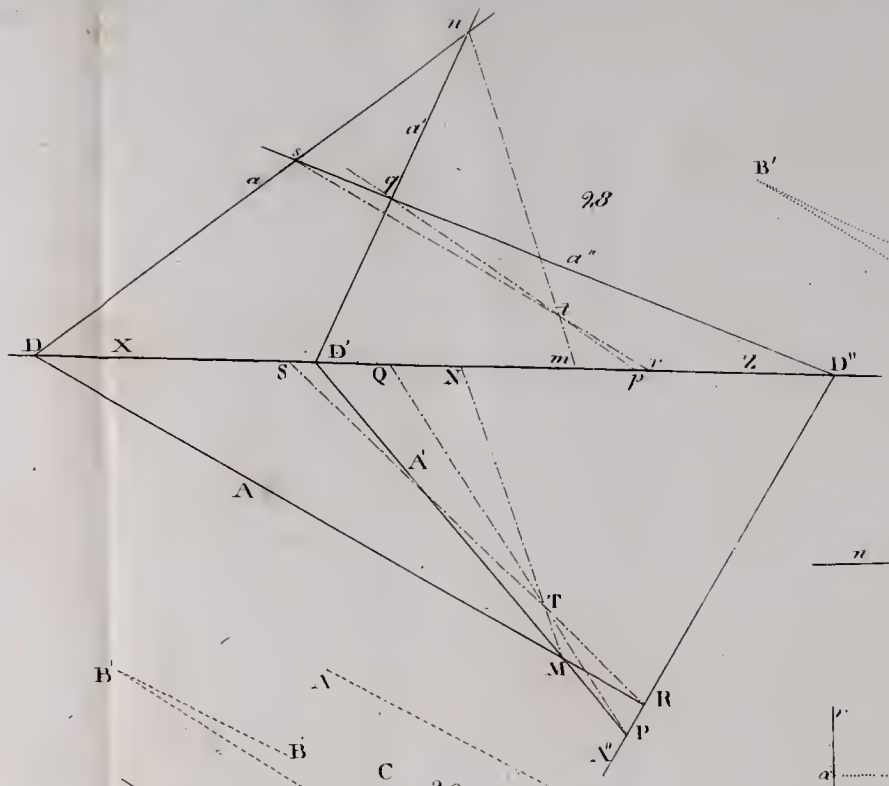

26
P
A
R'
S
K
L
S'
C
R
M
D
B
P'
X
Z


27
D
E
I
II
III

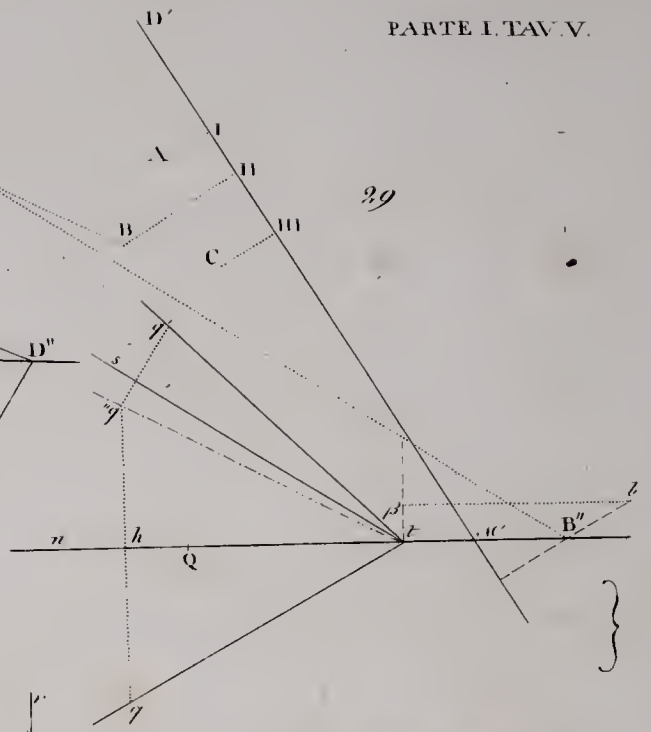

X
D
O
Z
K
A
B
I
II
III
C
L


P
A
M
D
B
D'
D''
C

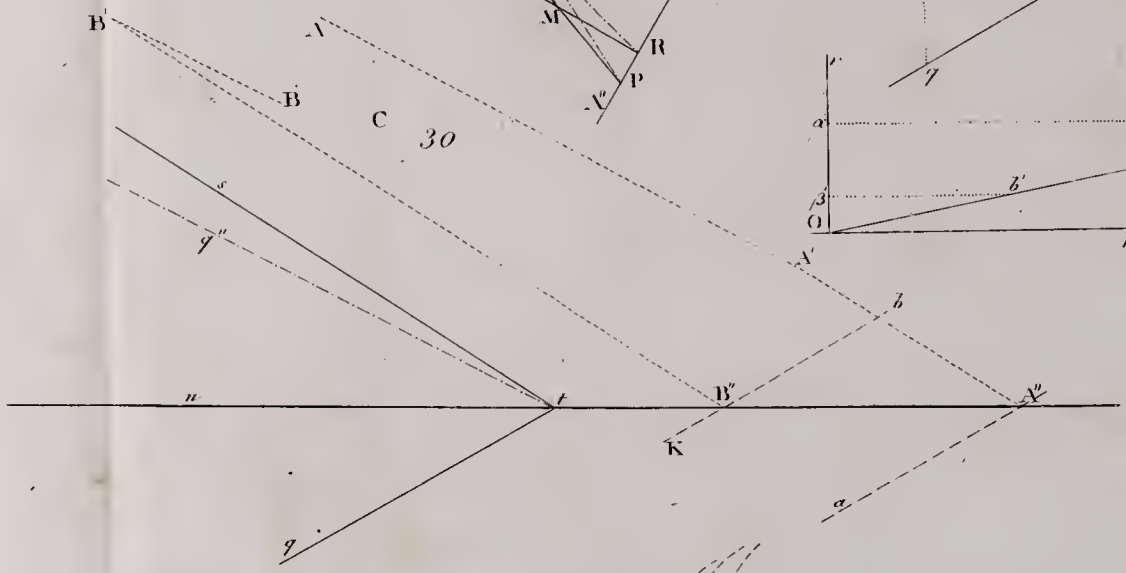
28



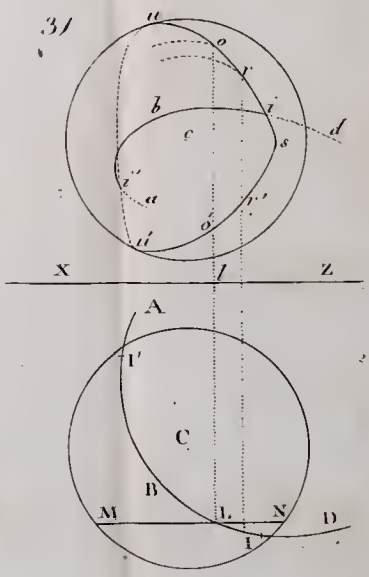
29



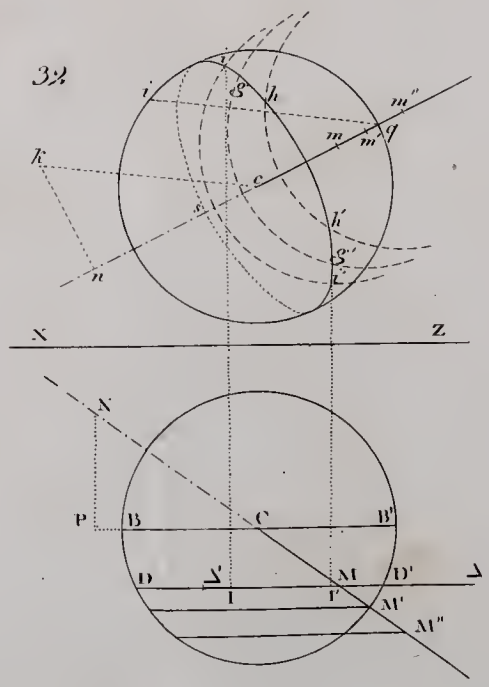
30



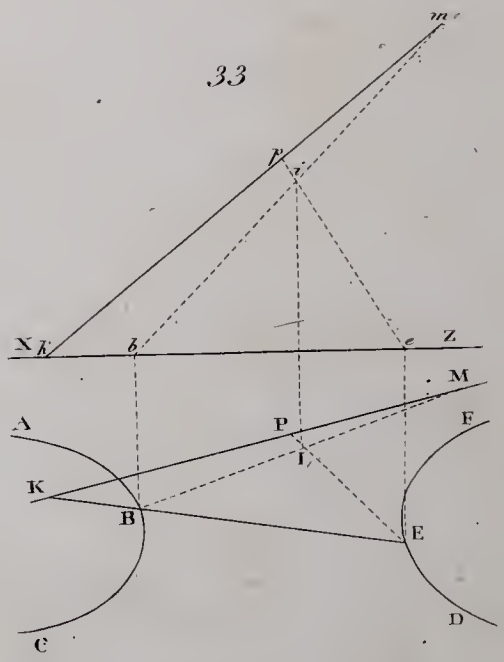
31



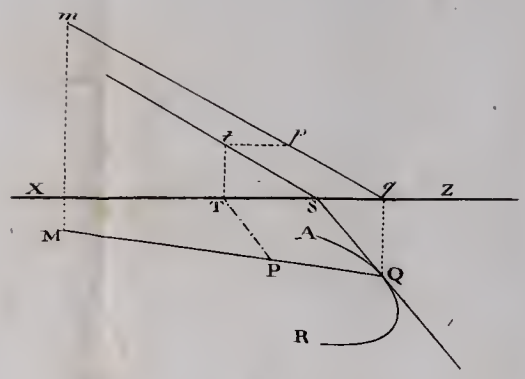
32



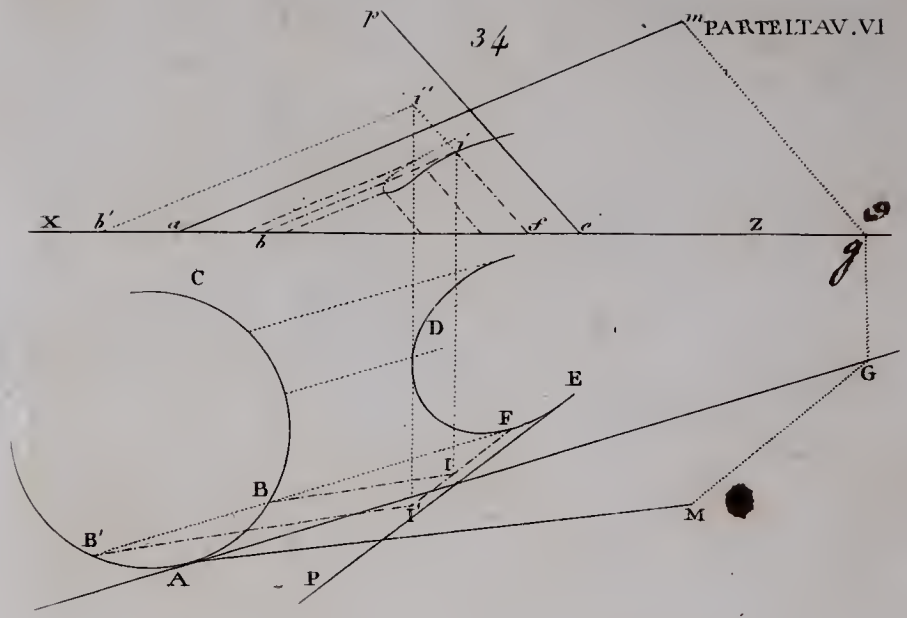
33



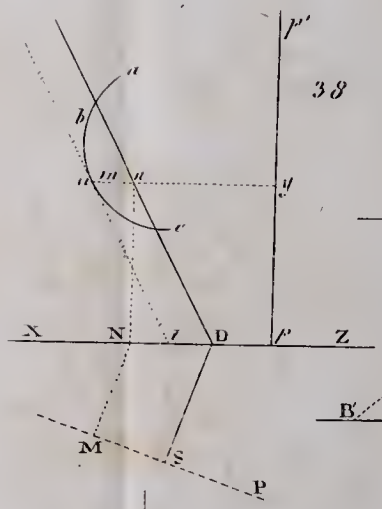
37

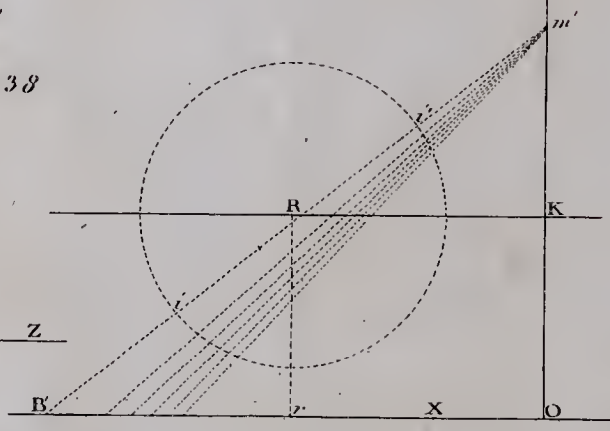

m
X
T
S
q
Z
M
A
P
Q
R

34

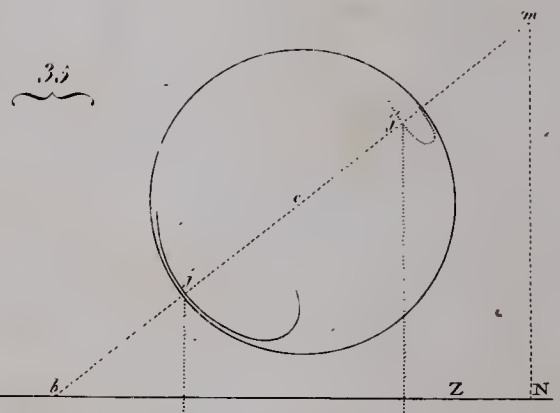

p
m
X
b'
a
b
f
e
Z
g
C
D
E
F
G
B
B'
A
P
M

38

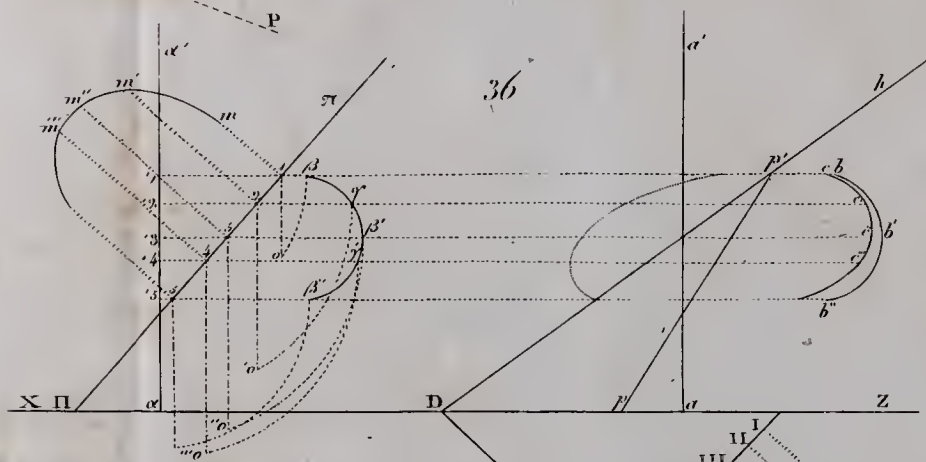

p'
a
b
c
X
N
D
p
Z
M
P

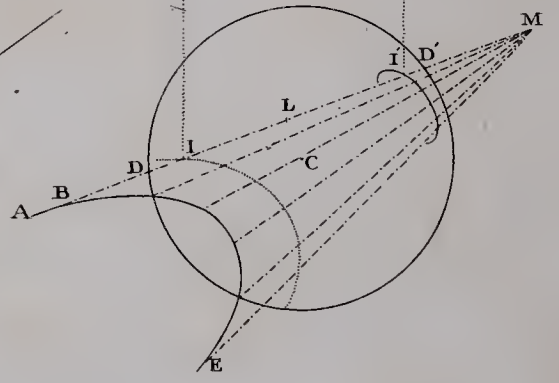

m'
R
K
B'
X
O

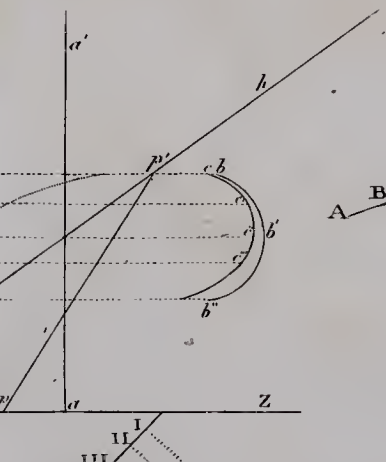
35

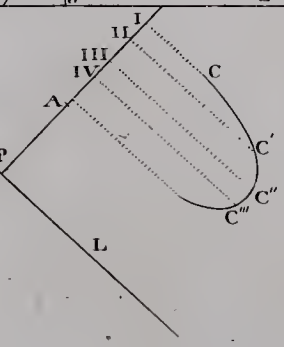

m
b
Z
N

36

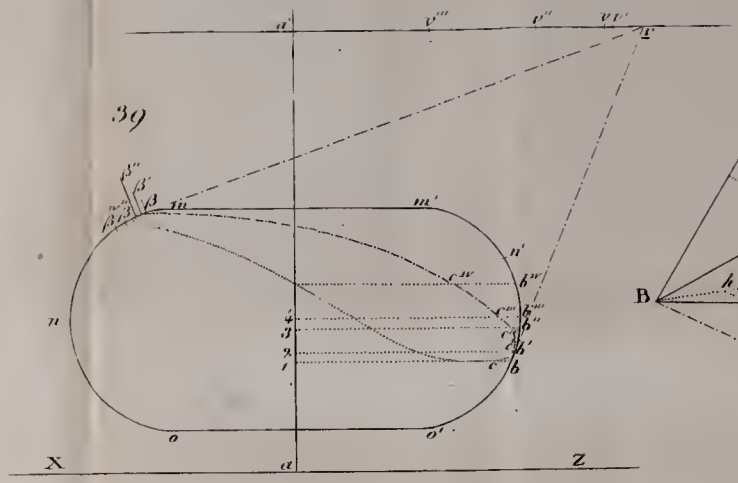

a'
m''
m'
m
π
β
β'
β''
X
Π
a
D
p'
a
Z


M
I
D'
L
D
C
B
A
E

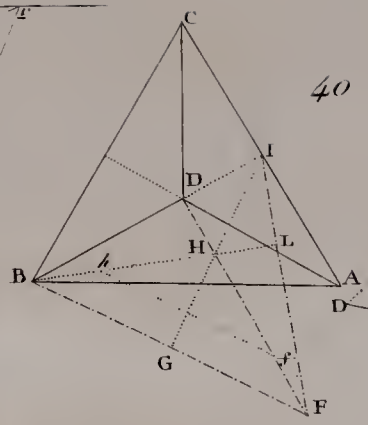

a'
h
p'
b
b'
b''


I
II
III
IV
C
A
C'
P
C''
C'''
L

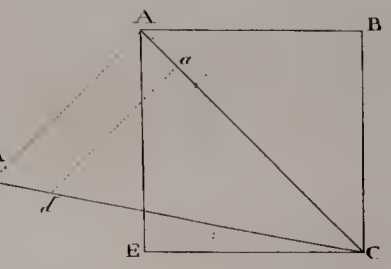
39

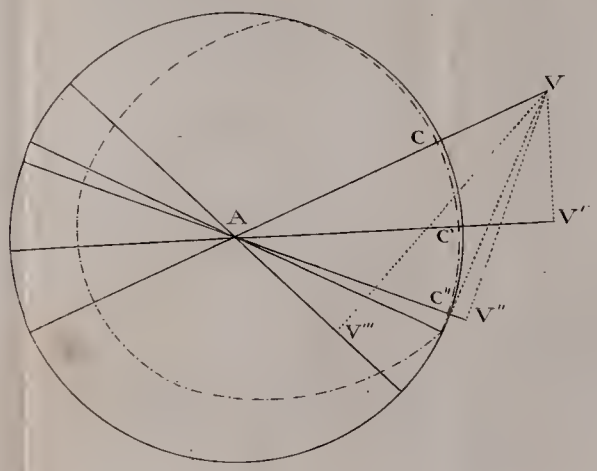


40

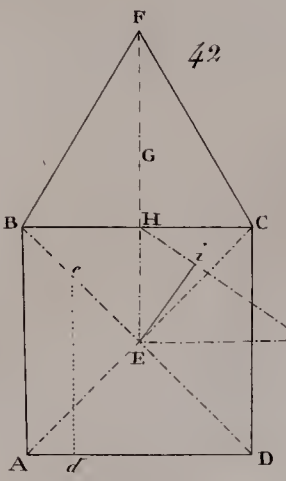


41

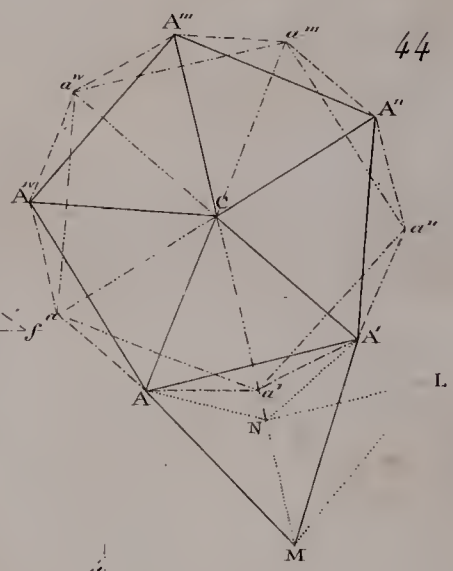




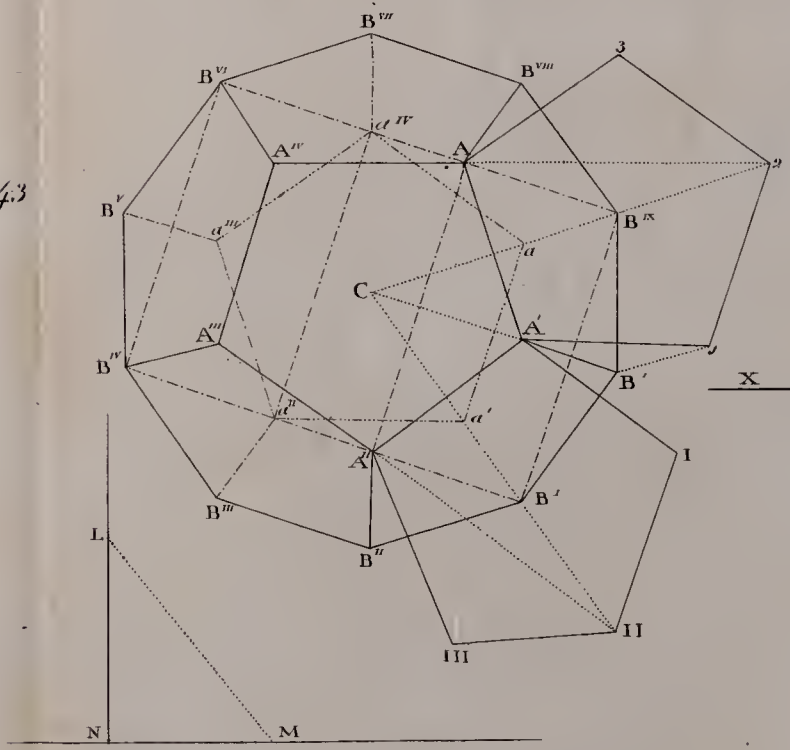
42



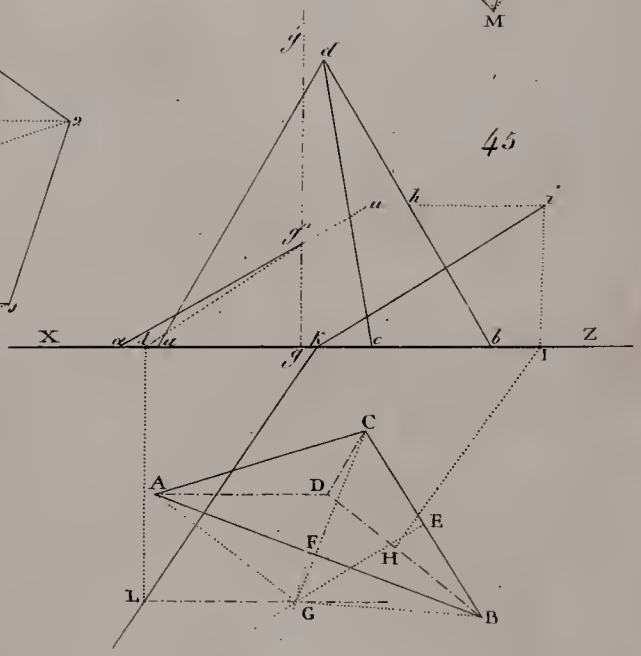
44



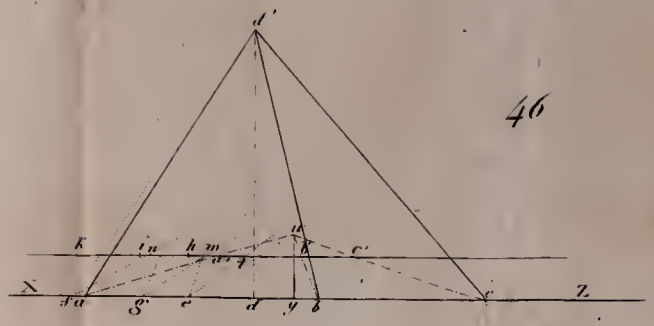
43



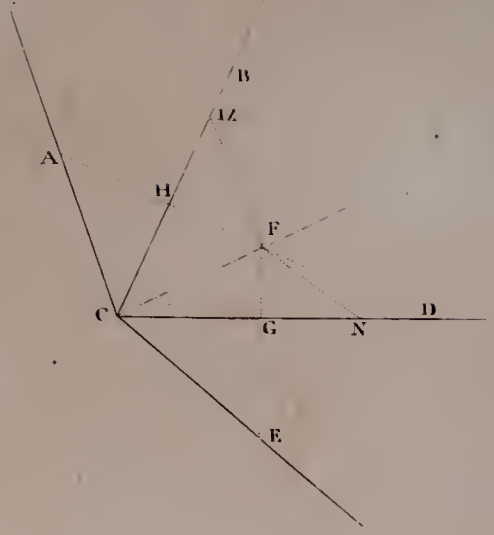
45

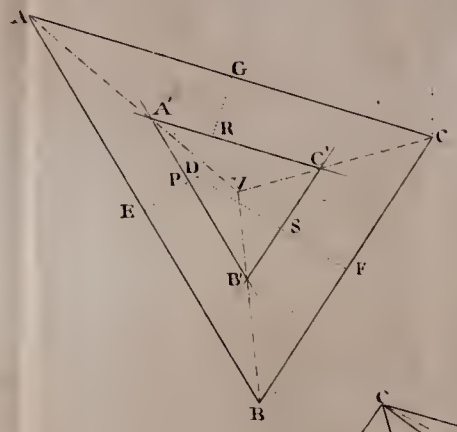


46

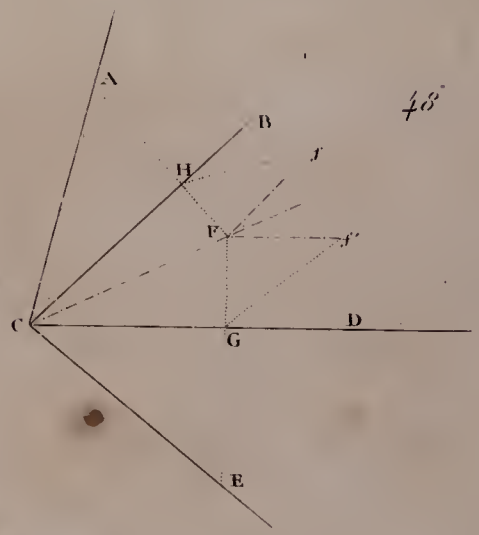


47

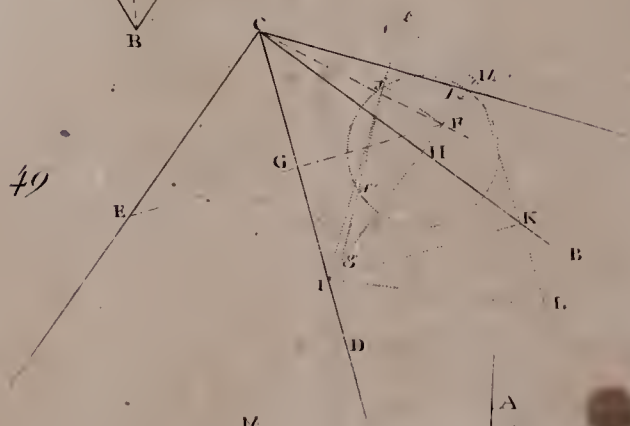




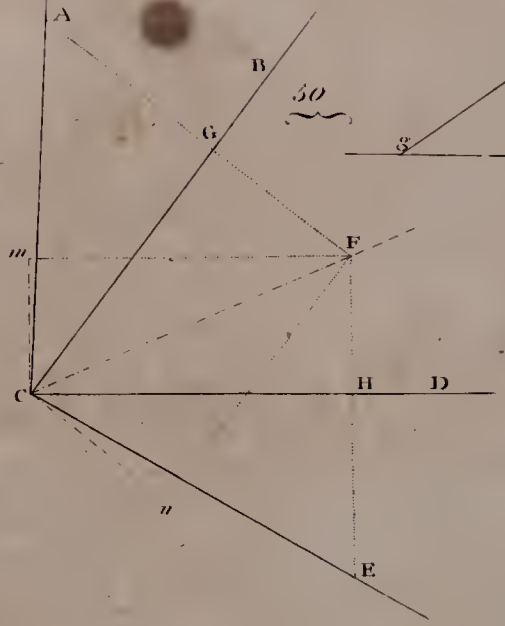
48

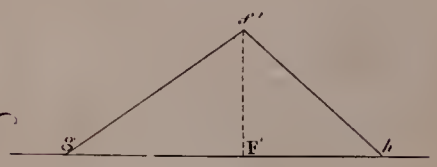


49

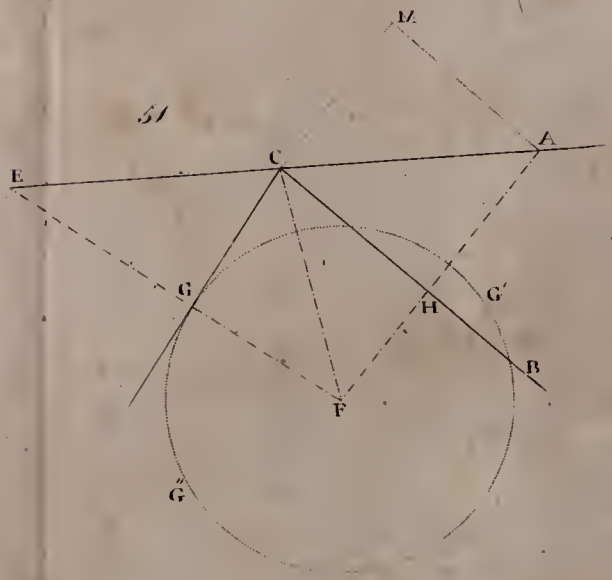


50

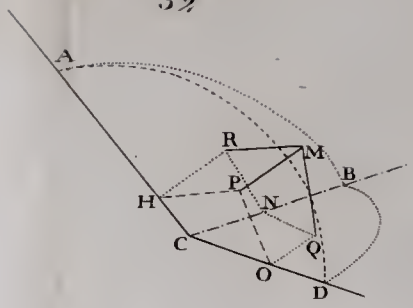


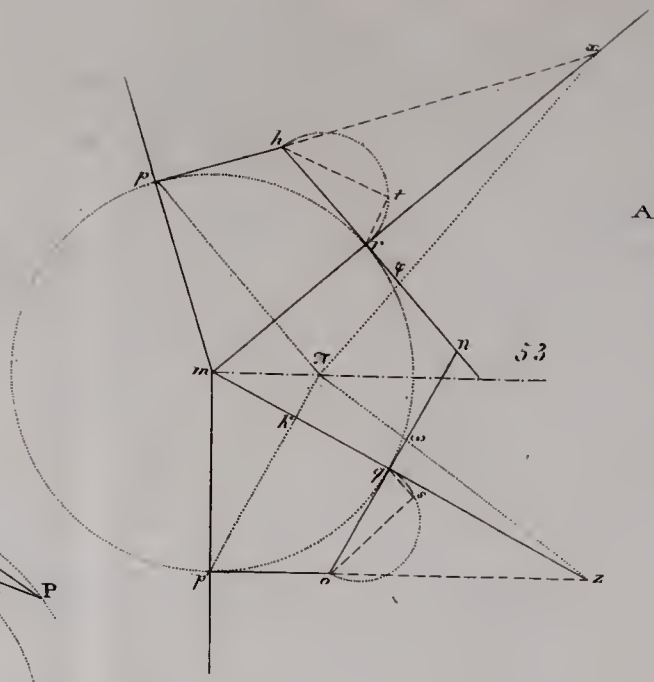


51



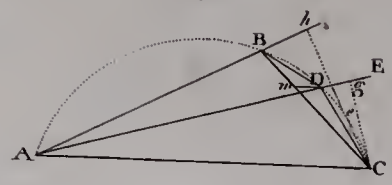
52



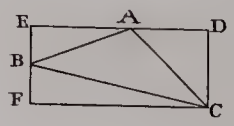


53

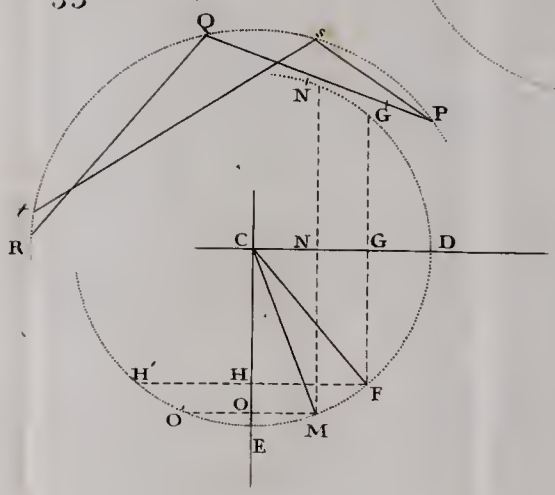
54



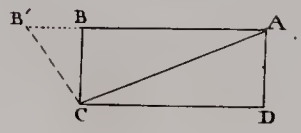
57

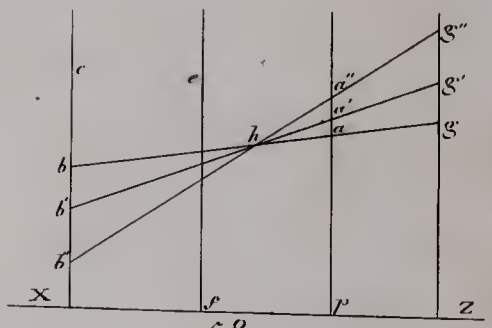


55

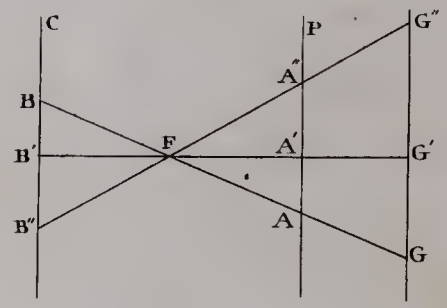


56

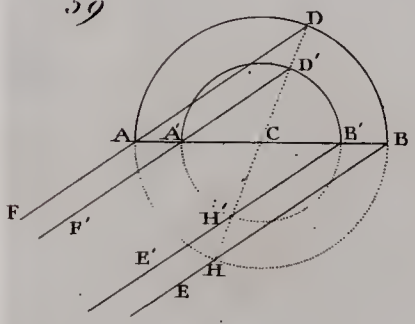


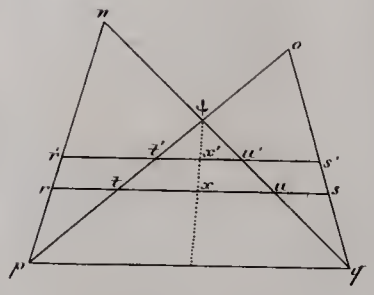


58

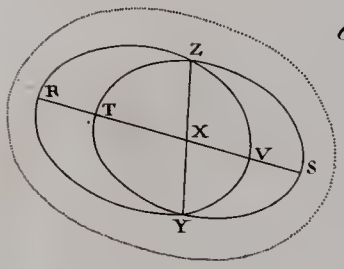


59

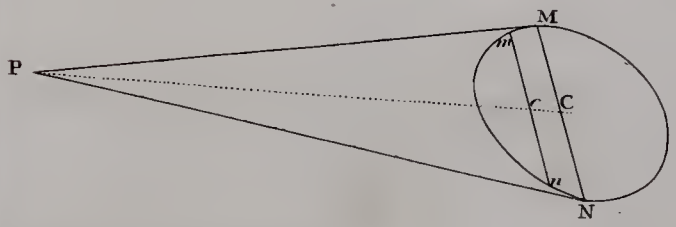




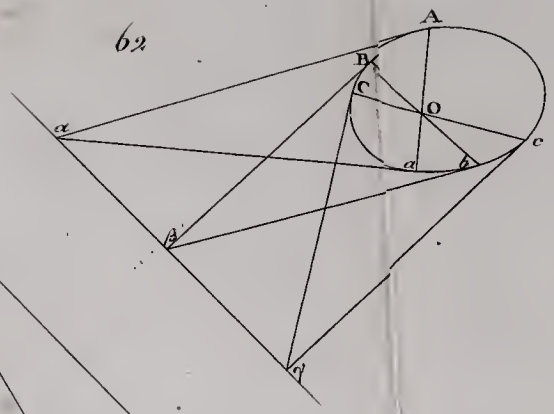
60



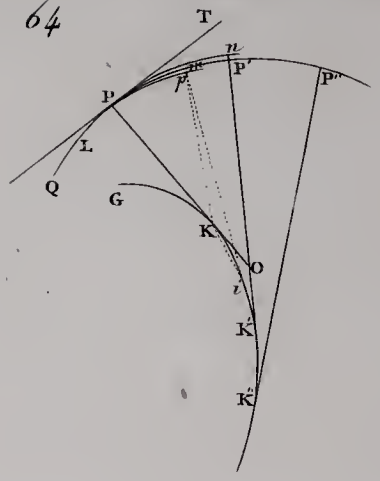
61



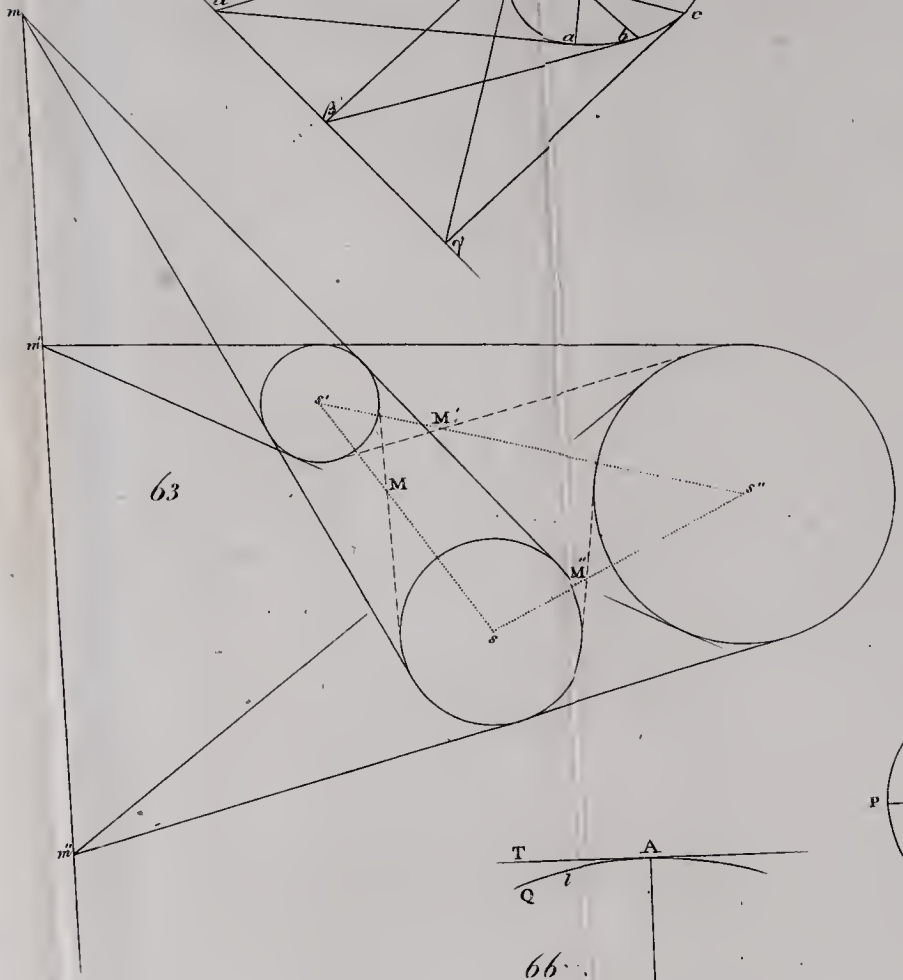
62



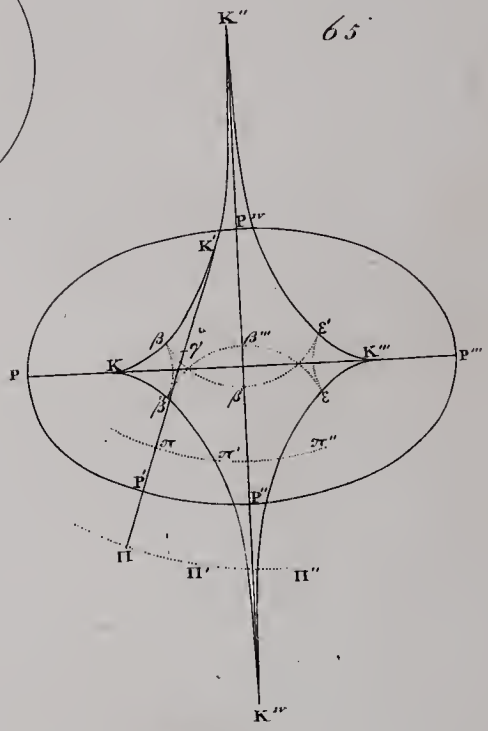
64



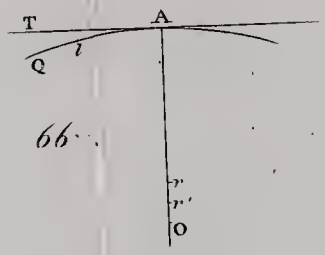
63

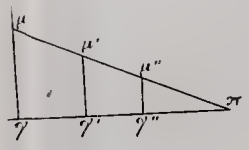


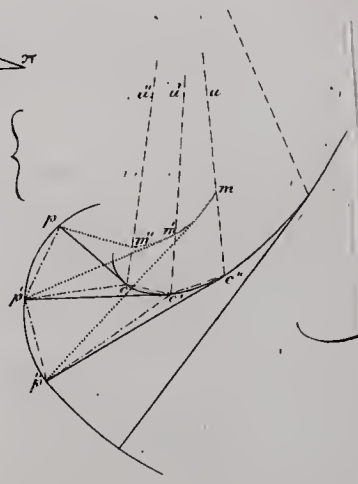
65



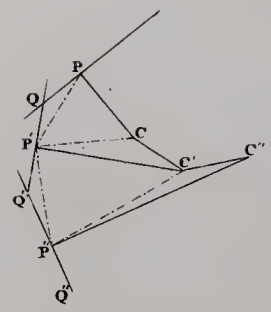
66







67



2623-640

Aw 95
7221